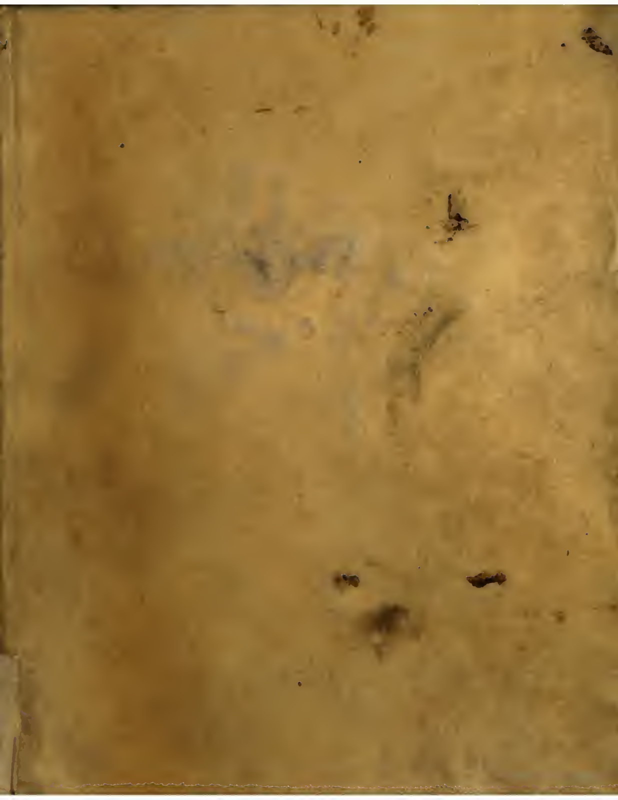


ARITHMETICA UNIVERSALIS;

SIVE

DE

COMPOSITIONE,

ET

RESOLUTIONE

ARITHMETICA

LIBER.

Auctore IS. NEWTON, Eq. Aur.







LUGDUNI BATAVORUM,
Apud JOH. ET HERM. VERBEEK, Bibliopolæ
MDCCXXXII.

G. J. 'S GRAVESANDE

L. S.

Liber hicce prima vice, inſcio Auctore, & ipſo hoc ægre ferente, editus fuit Cantabrigiæ anno 1707.

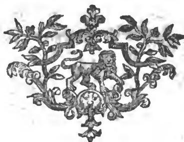
Secunda vice in lucem prodiit Londini 1722; *ſed in ſtatu perfectiore, ut quis facile percipiat, non omnino fœtum abdicaſſe virum Celeberrimum; ordo propoſitionum non tantum mutatus eſt, ſed in ipſis ſolutionibus & demonſtrationibus correctiones multæ reperiuntur, non niſi ipſi Auctori tribuendæ.*

Secundam hanc editionem ſecuti fuimus, adjecto tamen monito primæ editioni præpoſito, & in ſecunda ſuppreſſo. Singulaſque ſchedas totius operis, ab alio jam correctas, ipſi, antequam prælo ſubjicerentur, examinavimus & legimus.

Nihil in laudem operis dicam, nomen Auctoris in titulo legitur, & hoc quidem ſatis eſt. Non ego editionem dirigere ſuſcepiſſem, niſi librum magni facerem, jam etiam quid de ipſo ſentiam explicavi ſatis in Præfatione ad Specimen Commentarii in hunc ipſum; quod Specimen habetur ad calcem libelli noſtri, cui titulus Matheſeos Univerſalis Elementa.

PRÆFATIO.

Cum Newtoni Arithmetica primum in lucem prodiret, adjecerat Editor, propter convenientiam materiæ, Halleii Methodum extrahendi radices Æquationum, desumtam ex Transactionibus Philosophicis Societatis Regiæ Londinensis; Nos hoc exemplum secuti, non tantum hoc se Hallei scriptum, sed omnia adjecimus, quæ in dictis Transactionibus reperiuntur, & quæ nobis ad Newtoni librum illustrandum utilia visa sunt. Quæ Anglico sermone conscripta erant latinè reddidit vir Rev. Joh. Petr. Bernard, viri Celeberrimi Jacobi Bernard, in hac nostra Academia Batava Professoris Philosophiæ & Mathes. dignissimi & Collegæ nostri dum viveret conjunctissimi, filius.



AD

MONITUM
PRIMÆ EDITIONI PRÆMISSUM.

AD
LECTOREM.

CUM poſt haud paucos Doctorum Virorum in Arte Analytica tradenda labores Liber aliquis materia plenus, mole parvus, in regulis neceſſariis brevis, in exemplis certo conſilio electus longus, & primis Tyronum conatibus accommodatus etiamnum deſiderari videretur; interque κειμήλια noſtra Academica hujuſmodi Tractatus M. S. publicas Profeſſoris Mathematici tunc temporis Celeberrimi Prælectiones, triginta fere abhinc annis in Scholis habitas continens, mihi ſtatim occurreret; Dedi Operam ut Libellus iſte imperfectus licet, & currente calamo pro officii urgentis ratione compoſitus, nec prælo ullatenus deſtinatus, tamen in uſum ſtudioſæ juventutis nunc in publicum prodiret. In quo quidem Quæſtiones haud paucæ è variis Scientiis adductæ multiplicem Arithmeticæ Uſum ſatis oſtendunt. Animad-

madvertendum tamen Constructiones illas sive Geometricas sive Mechanicas prope finem adpositas inveniendis solum duabus tribusve Radicum figuris prioribus, uti suo loco dicitur, inservire: Opus enim Cl. Autor ad umbilicum nunquam perduxit; Cubicarum Æquationum Constructionem hic loci tradidisse contentus; dum interea in animo habuerit Biquadraticarum aliarumque superiorum potestatum Constructionem methodo generali exponendam adjicere, & qua ratione reliquæ Radicum Figuræ essent extrahendæ sigillatim docere. Cum autem summo Viro hisce minutiis postmodo vacare minime placuerit, defectum hunc aliunde supplere volui; atque eum in finem generalem planeque egregiam Cl. Halleji Æquationum Radices extrahendi methodum ex Actis nostris Philosophicis, exorata prius utrobique venia, huc transferendam judicavi. Vale Lector, & conatibus nostris fave.

G. W.

Dabam Cantabrigiæ
III. Kal. Mai.
A.D. MDCCVII.

INDEX

INDEX.

Ed.

INDEX.

I. NEW-

I. NEWTONI
ARITHMETICA UNIVERSALIS:
SIVE
DE
COMPOSITIONE
ET
RESOLUTIONE
ARITHMETICA
LIBER.

ARITHMETICA UNIVERSALIS,

SIVE

DE

COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE

ARITHMETICA

LIBER.

COMPUTATIO vel fit per *numeros* ut in vulgari Arithmetica, vel per *species* ut Analystis mos est. Utraque iisdem innititur fundamentis, & ad eandem metam collimat: *Arithmetica* quidem definite & particulariter, *Algebraica* autem indefinitè & universaliter; ita ut enuntiata ferè omnia quæ in hàc computatione habentur, & præsertim conclusiones, *Theoremata* dici possint. Verùm Algebra maximè præcellit quòd cùm in Arithmetica Quæstiones tantùm resolvantur progrediendo à datis ad quæsitas quantitates, hæc à quæsitis tanquam datis ad datas tanquam quæsitas quantitates plerumque regreditur; ut ad conclusionem aliquam, seu Æquationem, quocunque demum modo perveniatur, ex quâ quantitatem quæsitam elicere liceat. Eoque pacto conficiuntur difficillima Problemata quorum resolutiones ex Arithmetica sola frustra peterentur. Arithmetica tamen Algebræ in omnibus ejus operationibus ita subservit, ut non nisi unicam perfectam *computandi Scientiam* constituere videantur; & utramque propterea conjunctim explicabo.

Quisquis hanc Scientiam aggreditur, imprimis vocum & notarum

ſignificationes intelligat, & fundamentales addiſcat operationes, Additionem nempe, Subductionem, Multiplicationem, Diviſionem, Extractionem Radicum, Reductiones fractionum & radicalium quantitatum, & modos ordinandi terminos Æquationum, ac incognitas quantitates (ubi plures ſunt) exterminandi. Deinde has operationes, reducendo Problemata ad æquationes, exerceat; & ultimò naturam & reſolutionem æquationum contempletur.

De Vocum quarundam & notarum ſignificatione.

PER *Numerum* non tam multitudinem unitatum quam abſtractam quantitatis cujuſvis ad aliam ejuſdem generis quantitatem quæ pro unitate habetur rationem intelligimus. Eſtque triplex; integer, fractus & ſurdus: *Integer* quem unitas metitur, *Fractus* quem unitatis pars ſubmultiplex metitur, & *Surdus* cui unitas eſt incommenſurabilis.

Integrorum numerorum notas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,) & notarum, ubi plures inter ſe nectuntur, valores nemo non intelligit. Quemadmodum verò numeri in primo loco ante unitatem, ſive ad ſiniſtram, ſcripti denotant denas unitates, in ſecundo centenas, in tertio millenas, *&c.* Sic numeri in primo loco poſt unitatem ſcripti denotant decimas partes unitatis, in ſecundo centeſimas, in tertio milleſimas, *&c.* Hos autem dicimus Fractos *Decimales* quòd in ratione decimali perpetuò decreſcant. Et ad diſtinguendum integros à decimalibus interjici ſolet comma, vel punctum, vel etiam lineola. Sic numerus 732'|569, denotat ſeptingentas triginta duas unitates, una cum quinque decimis, ſex centeſimis, & novem milleſimis partibus unitatis. Qui & ſic 732,|569, vel ſic 732.569, vel etiam ſic 732⌊569, nonnunquam ſcribitur. Atque ita numerus 57104'2083, denotat quinquaginta ſeptem mille, centum & quatuor unitates; una cum duabus decimis, octo milleſimis, & tribus decimis milleſimis partibus unitatis. Et numerus 0'064 denotat ſex centeſimas & quatuor milleſimas partes. Surdorum & aliorum fractorum notæ in ſequentibus habentur.

Cum rei alicujus quantitas ignota eſt vel indeterminatè ſpectatur, ita ut per numeros non liceat exprimere, ſolemus per ſpeciem *aliquam ſeu*

literam

literam designare. Et si quando cognitas quantitates tanquam indeterminatas spectemus, discriminis causa designamus initialibus Alphabetæ literis a, b, c, d, & incognitas finalibus z, y, x, &c. Aliqui pro cognitis substituunt consonantes vel majusculas literas, & vocales vel minusculas pro incognitis.

Quantitates vel Affirmativæ *sunt seu majores nihilo, vel* Negativæ *seu nihilo minores.* Sic in rebus humanis possessiones dici possunt bona affirmativa, debita vero bona negativa. Inque motu locali progressus dici potest motus affirmativus, & regressus motus negativus, quia prior auget & posterior diminuit iter confectum. Et ad eundem modum in Geometria, si linea versus plagam quamvis ducta pro affirmativa habeatur, negativa erit quæ versus plagam oppositam ducitur. Veluti si AB dextrorsum ducatur, & BC sinistrorsum; ac AB statuatur affirmativa, tunc BC pro negativa habebitur, eò quòd inter ducendum diminuit AB; redigitque vel ad breviorem AC, vel ad nullam si forte C inciderit in ipsum A, vel ad minorem nulla si BC longior fuerit quam AB de qua aufertur. *Negativæ* quantitati designandæ signum —, *Affirmativæ* signum + præfigi solet. Signum $\mp$ incertum est, & signum $\pm$ etiam incertum sed priori contrarium. TAB. I. Fig. 1.

In aggregato quantitatum nota + significat quantitatem suffixam esse cæteris addendam *& nota — esse* subducendam. Et has notas vocabulis *plus* & *minus* exprimere solemus. Sic $2+3$, sive 2 plus 3, valet summam numerorum 2 & 3, hoc est 5. Et $5-3$, sive 5 minus 3, valet differentiam quæ oritur subducendo 3 à 5, hoc est 2. Et $-5+3$ valet differentiam quæ oritur subducendo 5 à 3, hoc est -2. Et $6-1+3$ valet 8. Item $a+b$ valet summam quantitatum a & b: Et $a-b$ valet differentiam, quæ oritur subducendo b ab a. Et $a-b+c$ valet summam istius differentiæ & quantitatis c. Puta si a sit 5, b 2, & c 8; tum $a+b$ valebit 7 & $a-b$ 3 & $a-b+c$ 11. Item $2a+3a$ valet $5a$. Et $3b-2a-b+3a$ valet $2b+a$; nam $3b-b$ valet $2b$ & $-2a+3a$ valet a, quorum aggregatum est $2b+a$. Et sic in aliis. Hæ autem notæ + & — dicuntur *Signa*. Et ubi neutrum initiali quantitati præfigitur signum + subintelligi debet.

Multiplicatio propriè dicitur quæ fit per numeros integros, utpote quærendo novam quantitatem toties majorem quantitate multiplicanda quoties numerus multiplicans sit major unitate. Sed aptioris vocabuli defectu Multiplicatio etiam dici solet quæ fit per fractos aut surdos numeros; quærendo novam quantitatem in ea quacunque ratione ad quantitatem multiplicandam quam habet multiplicator ad unitatem. Neque tantùm fit per abstractos numeros sed etiam per concretas quantitates, ut per lineas, superficies, motum localem, pondera, *&c.* quatenus hæ ad aliquam sui generis notam quantitatem tanquam unitatem relatæ, rationes numerorum exprimere possunt, & vices supplere. Quemadmodum si quantitas A multiplicanda sit per lineam duodecim pedum, posito quod linea bipedalis sit unitas, producentur per istam multiplicationem 6 A, sive sexies A, perinde ac si A multiplicaretur per abstractum numerum 6, siquidem 6 A sit in ea ratione ad A quam habet linea duodecim pedum ad unitatem bipedalem. Atque ita si duas quasvis lineas AC & AD per se multiplicare oportet, capiatur AB unitas, & agatur BC eique parallela DE, & AE productum erit hujus multiplicationis, eo quod sit ad AD ut AC ad unitatem AB. Quin etiam mos obtinuit ut genesis seu descriptio superficiei per lineam super alia linea ad rectos angulos moventem dicatur multiplicatio istarum linearum. Nam quamvis linea utcunque multiplicata non possit evadere superficies, adeoque hæc superficiei è lineis generatio longè alia sit à multiplicatione, in hoc tamen conveniunt, quod numerus unitatum in alterutra linea, multiplicatus per numerum unitatum in altera, producat abstractum numerum unitatum in superficie lineis istis comprehensa, si modò Unitas superficialis definiatur, ut solet, Quadratum cujus latera sunt unitates lineares. Quemadmodum si recta AB constet quatuor unitatibus & AC tribus, tum rectangulum AD constabit quater tribus seu duodecim unitatibus quadratis ut inspicienti Schema patebit. Estque similis analogia solidi & ejus quod continua trium quantitatum multiplicatione producitur. Et hinc vicissim evenit quod vocabula *ducere*, *contentum*, *rectangulum*, *quadratum*, *cubus*, *dimensio*, *latus*, & similia quæ ad Geometriam spectant, Arith-

Tab. I. Fig. 3.

Tab. I. Fig. 2.

Arithmeticis tribuantur operationibus. Nam per *quadratum*, vel *rectangulum*, vel *quantitatem duarum dimensionum* non semper intelligimus superficiem, sed ut plurimùm quantitatem alterius cujuscunque generis quæ multiplicatione aliarum duarum quantitatum producitur, & sæpissimè lineam quæ producitur multiplicatione aliarum duarum linearum. Atque ita dicimus *Cubum* vel *Parallelepipedum*, vel *quantitatem trium dimensionum* pro eo quod binis multiplicationibus producitur, *latus* pro radice, *ducere* pro multiplicare; & sic in aliis.

Numerus speciei alicui immediatè præfixus denotat speciem illam toties sumendam esse. Sic $2a$ denotat duo a, $3b$ tria b, $15x$ quindecim x.

Duæ vel plures species immediatè connexæ designant factum, seu quantitatem quæ fit per multiplicationem omnium in se invicem. Sic ab denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b. Et abx denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b, & factum illud per x. Puta si a sit 2, & b sit 3, & x sit 5, tum ab erit 6 & abx 30.

Inter quantitates sese multiplicantes, nota $\times$, vel vocabulum *in*, ad factum designandum nonnunquam interscribitur. Sic 3×5 vel 3 in 5 denotat 15. Sed usus harum notarum præcipuus est, ubi compositæ quantitates sese multiplicant. Veluti si $y - 2b$ multiplicet $y + b$, terminos utriusque multiplicatoris lineolâ superimpositâ connectimus & scribimus $\overline{y - 2b}$ in $\overline{y + b}$, vel $\overline{y - 2b} \times \overline{y + b}$.

Divisio propriè est quæ fit per numeros integros quærendo novam quantitatem toties minorem quantitate dividenda quoties unitas sit minor Divisore. Sed ob analogiam vox etiam usurpari solet cum nova quantitas in ratione quacunque ad quantitatem dividendam quæritur quam habet unitas ad divisorem; sive divisor ille sit fractus aut surdus numerus aut alia cujusvis generis quantitas. Sic ad dividendum lineam AE per lineam AC, existente AB unitate; agenda est ED parallela CB, & erit AD Quotiens. Imò & Divisio propter similitudinem quandam dicitur cum rectangulum ad datam lineam tanquam Basem applicatur ut inde noscatur altitudo. Tab. I. Fig. 3.

Quantitas infra quantitatem cum lineola interjecta denotat quotum, seu

seu quantitatem quæ oritur ex divisione superioris quantitatis per inferiorem. Sic $\frac{6}{2}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo 6 per 2, hoc est 3: & $\frac{5}{8}$ quantitatem quæ oritur dividendo 5 per 8, hoc est octavam partem numeri 5: & $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo a per b; puta si a sit 15 & b 3, tum $\frac{a}{b}$ denotat 5. Et sic $\frac{ab-bb}{a+x}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo $ab-bb$ per $a+x$. Atque ita in aliis. Hujusmodi autem quantitates *fractiones* dicuntur, parsque superior *Numerator*, ac inferior *Denominator*.

Aliquando Divisor quantitati divisæ, interjecto arcu, præfigitur. Sic ad designandum quantitatem quæ oritur ex divisione $\frac{axx}{a+b}$ per $a-b$, scribi potest $a-b)\,\frac{axx}{a+b}$.

Etsi multiplicatio per immediatam quantitatum conjunctionem denotari solet, tamen numerus integer ante numerum fractum denotat summam utriusque. Sic $3\frac{1}{2}$ denotat tria cum semisse.

Si quantitas se ipsam multiplicet, numerus factorum, compendii gratia, suffigi solet. Sic pro aaa scribimus a^3, pro $aaaa$ scribimus a^4, pro $aaaaa$ scribimus a^5, & pro $aaabb$ scribimus a^3bb vel a^3b^2. Puta si a sit 5 & b sit 2, tum a^3 erit $5\times5\times5$ sive 125, & a^4 erit $5\times5\times5\times5$ sive 625, atque a^3b^2 erit $5\times5\times5\times2\times2$ sive 500. Ubi nota quod numerus inter duas species immediatè scriptus, ad priorem semper pertinet. Sic 3 in quantitate a^3bb non denotat bb ter capiendum esse sed a in se bis ducendum. Nota etiam quod hæ quantitates tot *dimensionum* vel *potestatum* vel *dignitatum* esse dicuntur quot factoribus seu quantitatibus se multiplicantibus constant, & numerus suffixus vocatur *Index* potestatum vel dimensionum. Sic aa est duarum dimensionum vel potestatum, & a^3 trium, ut indicat suffixus numerus 3. Dicitur etiam aa quadratum, a^3 cubus, a^4 quadrato-quadratum, a^5 quadrato-cubus, a^6 cubo-cubus, a^7 quadrato-quadrato-cubus, & sic porro. Et quantitas a ex cujus in se multiplicatio-

plicatione hæ poteſtates generantur dicitur earum *Radix*, nempe radix quadratica quadrati aa, cubica cubi a^3, &c.

Cùm autem radix per ſeipſam multiplicata producat quadratum, & quadratum illud iterum per radicem multiplicatum producat cubum, *&c.* erit (ex definitione Multiplicationis) ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum, & quadratum ad cubum, *&c.* Adeoque quantitatis cujuſcunque *radix quadratica* erit medium proportionale inter unitatem & quantitatem illam, & *radix cubica* primum è duobus mediè proportionalibus, & *radix quadrato-quadratica* primum è tribus, & ſic præterea. Duplici igitur affectione radices innoteſcunt, tum quod ſeipſas multiplicando producant ſuperiores poteſtates, tum quod ſint è mediis proportionalibus inter iſtas poteſtates & unitatem. Sic numeri 64 radicem quadraticam eſſe 8 & cubicam 4, vel ex eo patet quod 8×8 & $4 \times 4 \times 4$ valeant 64, vel quod ſit 1 ad 8 ut 8 ad 64, & 1 ad 4 ut 4 ad 16 & 16 ad 64. Et hinc ſi lineæ alicujus AB radix quadratica extrahenda eſt, produc eam ad C ut ſit BC unitas, dein ſuper AC deſcribe ſemicirculum, & ad B erige perpendiculum huic circulo occurrens in D, eritque BD radix, quia media proportionalis eſt inter AB & unitatem BC. Tab. I. Fig. 4.

Ad deſignandam radicem *alicujus quantitatis præfigi ſolet nota* $\surd$ *ſi radix ſit quadratica*, *&* $\surd 3$: *Si ſit cubica*, *&* $\surd 4$: *Si quadrato-quadratica*, &c. Sic $\surd 64$ denotat 8; & $\surd 3 : 64$ denotat 4; & $\surd aa$ denotat a; & $\surd ax$ denotat radicem quadraticam ex ax; & $\surd 3 : 4axx$ radicem cubicam ex $4axx$. Ut ſi a ſit 3, & x 12; tum $\surd ax$ erit $\surd 36$, ſeu 6; & $\surd 3 : 4axx$ erit $\surd 3 : 1728$, ſeu 12. Et hæ radices ubi non licet extrahere dicuntur *ſurdæ quantitates*, ut $\surd ax$; vel *ſurdi numeri*, ut $\surd 12$.

Nonnulli pro deſignanda quadratica poteſtate uſurpant q, pro cubica c, pro quadrato-quadratica qq, pro quadrato-cubica qc, &c. Et ad hunc modum pro quadrato, cubo, & quadrato-quadrato ipſius A, ſcribitur Aq, Ac, Aqq, &c. Et pro radice cubica ex $abb - x^1$ ſcribitur $\surd c : abb - x^3$. Alii alias notas adhibent, ſed quæ jam ferè exoleverunt.

Nota $=$ *deſignat quantitates hinc inde* æquales *eſſe.* Sic $x = b$ deſignat x æqualem eſſe b.

Nota : : *significat quantitates hinc inde* proportionales *esse*. Sic $a.\ b :: c.\ d$, significat esse a ad b ut c ad d. Et $a.\ b.\ e :: c.\ d.\ f$ esse a, b & e inter se ut sunt c, d & f inter se respectivè, vel esse a ad c, b ad d & e ad f in eadem ratione.

Denique notarum quæ ex his componuntur interpretatio per Analogiam facile innotescit. Sic enim $\frac{3}{4}a^3bb$ denotat tres quartas partes ipsius a^3bb, & $3\frac{a}{c}$ ter $\frac{a}{c}$, & $7\sqrt{ax}$ septies $\sqrt{ax}$. Item $\frac{a}{b}x$ denotat id quod fit multiplicando x per $\frac{a}{b}$, & $\frac{5ee}{4a+9e}Z^3$ id quod fit multiplicando Z^3 per $\frac{5ee}{4a+9e}$ hoc est per Quotum exortum divisione $5ee$ per $4a+9e$; & $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$ id quod fit multiplicando $\sqrt{ax}$ per $\frac{2a^3}{9c}$; & $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ quotum exortum divisione $7\sqrt{ax}$ per c; & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ quotum exortum divisione $8a\sqrt{cx}$ per summam quantitatum $2a+\sqrt{cx}$. Et sic $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ denotat quotum exortum divisione differentiæ $3axx-x^3$ per summam $a+x$, & $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ radicem ejus Quoti, & $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ id quod fit multiplicando radicem illam per summam $2a+3c$. Sic etiam $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ denotat radicem summæ quantitatum $\frac{1}{4}aa$ & bb & $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem summæ quantitatum $\frac{1}{2}a$ & $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, & $\frac{2a^3}{aa-zz}\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem illam multiplicatam per $\frac{2a^3}{aa-zz}$. Et sic in aliis.

Cæterum nota quod in hujusmodi complexis quantitatibus non opus est ad significationem singularum literarum semper attendere; sed

sed sufficit in genere tantum intelligere, *e. g.* quod $\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$ significat radicem aggregati $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; quodcunque tandem prodeat illud aggregatum cum numeri vel lineæ pro literis substituuntur. Atque ita quod $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}}{a - \sqrt{ab}}$ significat quotum exortum divisione quantitatis $\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ per quantitatem $a - \sqrt{ab}$, perinde ac si quantitates illæ simplices essent & cognitæ, etsi quænam sint impræsentiarum prorsus ignoretur, & ad singularum partium constitutionem aut significationem neutiquam attendatur. Id quod monendum esse duxi ne complexione terminorum Tyrones quasi conterriti in limine hæreant.

DE ADDITIONE.

Numerorum, ubi *non sunt admodum compositi*, Additio per se manifesta est. Sic quod 7 & 9 seu 7 + 9 faciunt 16, & quod 11 + 15 faciunt 26 prima fronte patet. At in *magis compositis* opus peragitur *scribendo numeros serie descendente & summas columnarum sigillatim colligendo*. Quemadmodum si numeri 1357 & 172 addendi sunt, scribe alterutrum 172 infra alterum 1357 ita ut hujus unitates 2 alterius unitatibus 7 subjiciantur, cæterique numeri numeris correspondentibus, nempe deni 7 denis 5, & centenus 1 centenis 3. Tum incipiendo ad dextram, dic 2 & 7 faciunt 9 quem scribe infra. Item 7 & 5 faciunt 12, cujus posteriorem numerum 2 scribe infra, priorem vero 1 asserva proximis numeris 1 & 3 adjiciendum. Dic itaque præterea 1 & 1 faciunt 2, cui 3 adjectus facit 5, & scribe 5 infra, & manebit tantùm 1 prima figura superioris numeri, quæ etiam infra scribenda est, & sic habebitur summa 1529.

$$\begin{array}{r} 1357 \\ 172 \\ \hline 1529 \end{array}$$

Sic numeros 87899 + 13403 + 885 + 1920, quo in unam summam redigantur, scribe in serie descendente ita ut unitates unam co-

 lu-

lumnam, deni numeri aliam, centeni tertiam, milleni quartam constituant, & sic præterea. Deinde dic 5 + 3 valent 8, & 8 + 9 valent 17, scribeque 7 infra, & 1 adjice proximis numeris dicendo 1 + 8 valent 9, 9 + 2 valent 11, ac 11 + 9 valent 20: Subscriptoque 0., dic iterum ut ante 2 + 8 valent 10, 10 + 9 valent 19, 19 + 4 valent 23, & 23 + 8 valent 31, adeoque asservato 3 subscribe 1 ut ante & iterum dic 3 + 1 valent 4, 4 + 3 valent 7, & 7 + 7 valent 14. Quare subscribe 4, denuoque dic 1 + 1 valent 2, & 2 + 8 valent 10, quem ultimò subscribe, & omnium summam habebis 104107.

$$\begin{array}{r} 87899 \\ 13403 \\ 1920 \\ 885 \\ \hline 104107 \end{array}$$

Ad eundem modum numeri decimales adduntur ut in annexo paradigmate videre est.

$$\begin{array}{r} 630'953 \\ 51'0807 \\ 305'37 \\ \hline 987'4037 \end{array}$$

In terminis Algebraicis Additio *fit connectendo quantitates addendas cum signis propriis, & insuper uniendo quæ possunt uniri.* Sic a & b faciunt $a + b$; a & $-b$ faciunt $a - b$; $-a$ & $-b$ faciunt $-a - b$; $7a$ & $9a$ faciunt $7a + 9a$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $-a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$ vel $b\sqrt{ac} - a\sqrt{ac}$, nam perinde est quo ordine scribantur.

Quantitates affirmativæ quæ ex parte specierum conveniunt, uniuntur addendo numeros præfixos quibus species multiplicantur. Sic, $7a + 9a$ faciunt $16a$. Et $11bc + 15bc$ faciunt $26bc$. Item $3\frac{a}{c} + 5\frac{a}{c}$ faciunt $8\frac{a}{c}$, & $2\sqrt{ac} + 7\sqrt{ac}$ faciunt $9\sqrt{ac}$, & $6\sqrt{ab - xx} + 7\sqrt{ab - xx}$ faciunt $13\sqrt{ab - xx}$. Et ad eundem modum $6\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$ faciunt $13\sqrt{3}$. Quinetiam $a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{a + b}\sqrt{ac}$, additis nempe a & b tanquam si essent numeri multiplicantes $\sqrt{ac}$. Et sic $\overline{2a + 3c}\sqrt{\frac{3axx - x^3}{a + x}} + 3a\sqrt{\frac{3axx - x^3}{a + x}}$ faciunt $\overline{5a + 3c}\sqrt{\frac{3axx - x^3}{a + x}}$ eo quod $2a + 3c$ & $3a$ faciant $5a + 3c$.

Fractio-

Fractiones affirmativæ quarum idem est denominator, uniuntur addendo numeratores. Sic $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ faciunt $\frac{3}{5}$, & $\frac{2ax}{b}+\frac{3ax}{b}$ faciunt $\frac{5ax}{b}$ & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}+\frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ faciunt $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$, & $\frac{aa}{c}+\frac{bx}{c}$ faciunt $\frac{aa+bx}{c}$.

Negativæ quantitates eodem modo adduntur ac affirmativæ. Sic -2 & -3 faciunt -5; $-\frac{4ax}{b}$ & $-\frac{11ax}{b}$ faciunt $-\frac{15ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ & $-b\sqrt{ax}$ faciunt $-\overline{a+b}\sqrt{ax}$. Ubi verò *negativa quantitas affirmativæ adjicienda est*, oportet affirmativam negativa diminuere. Sic 3 & -2 faciunt 1; $\frac{11ax}{b}$ & $-\frac{4ax}{b}$ faciunt $\frac{7ax}{b}$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{b-a}\sqrt{ac}$. Et nota quod ubi negativa quantitas excedit affirmativam, aggregatum erit negativum. Sic 2 & -3 faciunt -1; $-\frac{11ax}{b}$ & $\frac{4ax}{b}$ faciunt $-\frac{7ax}{b}$, ac $2\sqrt{ac}$ & $-7\sqrt{ac}$ faciunt $-5\sqrt{ac}$.

In additione aut plurium aut magis compositarum quantitatum, convenit observare formam operationis supra in additione numerorum expositam. Quemadmodum si $17ax-14a+3$, & $4a+2-8ax$ & $7a-9ax$ addendæ sunt, dispono eas in serie descendente ita scilicet ut termini maxime affines stent in iisdem columnis. Nempe numeri 3 & 2 in una columna, species $-14a$ & $4a$ & $7a$ in alia columna, atque species $17ax$ & $-8ax$ & $-9ax$ in tertia. Dein terminos cujusque columnæ sigillatim addo dicendo 2 & 3 faciunt 5 quod subscribo, dein $7a$ & $4a$ faciunt $11a$ & insuper $-14a$ facit $-3a$ quod iterum subscribo, denique $-9ax$ & $-8ax$ faciunt $-17ax$ & insu-

$$\begin{array}{rrr} 17ax & -14a & +3 \\ -8ax & +4a & +2 \\ -9ax & +7a & \\ \hline * & -3a & +5 \end{array}$$

insuper 17 ax facit o. Adeoque prodit summa $-3a + 5$.

Eadem methodo res in sequentibus exemplis absolvitur.

$$\begin{array}{lll} 12x + 7a & 11bc - 7\sqrt{ac} & -\frac{4ax}{b} + 6\sqrt{3} + \frac{1}{3} \\ 7x + 9a & 15bc + 2\sqrt{ac} & +\frac{11ax}{b} - 7\sqrt{3} + \frac{1}{3} \\ \hline 19x + 16a & 26bc - 5\sqrt{ac} & \frac{7ax}{b} - \sqrt{3} + \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -6xx + \frac{3}{5}x \\ 5x^3 + \frac{3}{5}x \\ \hline 5x^3 - 6xx + \frac{6}{5}x \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} & & & aay + 2a^3 & -\frac{a^4}{2y} \\ & -2ayy & - 4aay & + a^3 & \\ y^3 & + 2ayy & - \frac{1}{2}aay & & \\ \hline y^3 & * & -3\frac{1}{2}aay & + 3a^3 & -\frac{a^4}{2y} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} 5x^4 & + 2ax^3 & & & \\ -3x^4 & - 2ax^3 & + & 8\frac{3}{4}a^3\sqrt{aa+xx} & \\ -2x^4 & + 5bx^3 & - & 20a^3\sqrt{aa-xx} & \\ & - 4bx^3 & - & 7\frac{3}{4}a^3\sqrt{aa+xx} & \\ \hline * & + bx^3 & + & a^3\sqrt{aa+xx} & \\ & & - & 20a^3\sqrt{aa-xx}. & \end{array}$$

DE SUBDUCTIONE.

Numerorum *non nimis compositorum* inventio etiam Differentiæ per se patet. Quemadmodum quod 9 de 17 relinquat 8. At in *magis compositis* Subductio fieri solet *subscribendo numerum ablativum & sigillatim auferendo figuras inferiores de superioribus.* Sic ad auferendum 63543 de 782579, subscripto 63543, dic 3 de 9 relinquit 6, quod scribe infra: Dein 4 de 7 relinquit 3 quod pariter scribe infra: Tum 5 de 5 relinquit o, quod itidem subscribe: Postea 3 de 2 auferendum est, sed cum 3 sit majus, figura 1 à proxima figura 8 mutuò

$$\begin{array}{r} 782579 \\ 63543 \\ \hline 719036 \end{array}$$

sumi

ſumi debet, quæ una cum 2 faciat 12, à quo auferri poteſt 3, & reſtat 9, quod inſuper ſubſcribe: Adhæc cùm præter 6 etiam 1 de 8 auferendum ſit, adde 1 ad 6, & ſumma 7 de 8 relinquet 1 quod etiam ſubſcribe. Denique cùm in inferiori numero nihil reſtet auferendum de ſuperiori 7, ſubſcribe etiam 7, & ſic tandem habes differentiam 719036.

Cæterùm omnino cavendum eſt ut figuræ numeri ablativi ſubſcribantur in locis homogeneis; nempe unitates infra alterius numeri unitates, deni numeri infra denos, decimæ partes infra decimas, *&c.* Sicut in Additione dictum eſt. Sic ad auferendum decimalem 0'63 ab integro 547, non diſpones numeros hoc modo $\begin{smallmatrix}547\\063\end{smallmatrix}$; ſed ſic $\begin{smallmatrix}547\\ \quad 0'63\end{smallmatrix}$ ita nempe ut circulus qui locum unitatum in decimali occupat, ſubjiciatur unitatibus alterius numeri. Tum, circulis in locis vacuis ſuperioris numeri ſubintellectis, dic 3 de 0 auferendum eſſe, ſed cùm nequeat, debet 1 de loco anteriori mutuo ſumi ut 0 evadat 10 à quo 3 auferri poteſt & dabit 7, quod infra ſcribe. Dein illud 1 quod mutuò ſumitur, adjectum 6 facit 7; & hoc de ſuperiore 0 auferendum eſt; ſed cùm nequeat, debet iterum 1 de loco anteriori ſumi ut 0 evadat 10, & 7 de 10 relinquet 3, quod ſimiliter infra ſcribendum eſt. Tum illud 1 adjectum 0 facit 1, & hoc 1 de 7 relinquit 6, quod itidem ſubſcribe. Denique figuras etiam 54, ſiquidem de illis nihil amplius auferendum reſtat, ſubſcribe, & habebis reſiduum 546'37.

547
0'63
546'37

Exercitationis gratia plura tum in integris tum in decimalibus numeris exempla ſubjecimus.

1673	1673	458074	35'72	46,5003	308,7
1541	1580	9205	14'32	3,078	25,74
132	93	448869	21'4	43,4223	282,96

Siquando major numerus de minori auferendus eſt, oportet minorem de majore auferre, & reſiduo præfigere negativum ſignum. Veluti ſi auferendum ſit 1673 de 1541, è contra aufero 1541 de 1673, & reſiduo 132 præfigo ſignum —.

In terminis Algebraicis Subductio *fit connectendo quantitates cum ſignis omnibus quantitatis ſubducendæ mutatis, & inſuper uniendo quæ poſſunt*

possunt uniri, perinde ut in Additione factum est. Sic $+7a$ de $+9a$ relinquit $+9a-7a$ sive $2a$; $-7a$ de $+9a$ relinquit $+9a+7a$ sive $16a$; $+7a$ de $-9a$ relinquit $-9a-7a$ sive $-16a$; & $-7a$ de $-9a$ relinquit $-9a+7a$ sive $-2a$. Sic $3\frac{a}{c}$ de $5\frac{a}{c}$ relinquit $2\frac{a}{c}$; $7\sqrt{ac}$ de $2\sqrt{ac}$ relinquit $-5\sqrt{ac}$; $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{7}$ relinquit $\frac{2}{7}$; $-\frac{3}{7}$ de $\frac{2}{7}$ relinquit $\frac{5}{7}$; $-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$ relinquit $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ de $\frac{-17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ relinquit $\frac{-25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bx}{c}$ relinquit $\frac{bx-aa}{c}$; $a-b$ de $2a+b$ relinquit $2a+b-a+b$ sive $a+2b$; $3az-zz+ac$ de $3az$ relinquit $3az-3az+zz-ac$ sive $zz-ac$; $\frac{2aa-ab}{c}$ de $\frac{aa+ab}{c}$ relinquit $\frac{aa+ab-2aa+ab}{c}$ sive $\frac{-aa+2ab}{c}$: Et $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ de $\overline{a+x}\sqrt{ax}$ relinquit $\overline{a+x}-\overline{a+x}\sqrt{ax}$ sive $2x\sqrt{ax}$. Et sic in aliis.

Cæterum ubi quantitates pluribus terminis constant, operatio perinde ac in numeris institui potest. Id quod in sequentibus exemplis videre est.

$$\begin{array}{r}12x+7a\\ 7x+9a\\ \hline 5x-2a\end{array}\qquad \begin{array}{r}15bc+2\sqrt{ac}\\ -11bc+7\sqrt{ac}\\ \hline 26bc-5\sqrt{ac}\end{array}\qquad \begin{array}{l}5x^3+\frac{4}{7}x\\ 6xx-\frac{4}{7}x\\ \hline 5x^3-6xx+\frac{8}{7}x\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{7}\\ \frac{4ax}{b}-6\sqrt{3}-\frac{1}{7}\\ \hline \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{7}\end{array}$$

DE

DE MULTIPLICATIONE.

Numeri qui ex Multiplicatione duorum quorumvis numerorum non majorum quàm 9 oriuntur, memoriter addiscendi sunt. Veluti quod 5 in 7, facit 35, quòdque 8 in 9 facit 72, *&c.* Deinde majorum numerorum multiplicatio ad horum exemplorum normam instituetur.

Si 795 per 4 multiplicare oportet subscribe 4, ut vides. Dein dic, 4 in 5 facit 20, cujus posteriorem figuram 0 scribe infra 4, priorem vero 2 reserva in proximam operationem. Dic itaque præterea 4 in 9 facit 36, cui adde præfatum 2 & fit 38, cujus posteriorem figuram 8 ut ante subscribe, & priorem 3 reserva. Denique dic 4 in 7 facit 28 cui adde prædictum 3 & fit 31. Eoque pariter subscripto habebitur 3180 numerus qui prodit multiplicando totum 795 per 4.

```
 795
   4
----
3180
```

Porrò si 9043 multiplicandus est per 2305, scribe alterutrum 2305 infra alterum 9043 ut ante, & multiplica superiorem 9043 primò per 5 pro more ostenso, & emerget 45215, dein per 0 & emerget 0000, tertiò per 3 & emerget 27129, denique per 2 & emerget 18086. Hosque sic emergentes numeros in serie descendente ita scribe, ut cujusque inferioris ultima figura sit uno loco propior sinistræ quàm ultima superioris. Tandem hos omnes adde & orietur 20844115, numerus qui fit multiplicando totum 9043 per totum 2305.

```
    9043
    2305
    ----
   45215
   0000
  27129
 18086
--------
20844115
```

Decimales numeri per integros vel per alios decimales perinde multiplicantur, ut vides in his exemplis.

```
  72,4        50,18        3,9025
  29          2,75         0,0132
  ----        ----         ------
  6516        25090         78050
 1448        35126        117075
 ------      10036        39025
 2099,6      --------     ----------
             137,9950     0,05151300
```


Sed

Sed nota quod *in prodeunte numero tot semper figuræ ad dextram pro decimalibus abscindi debent quot sunt figuræ decimales in utroque numero multiplicante.* Et si fortè non sint tot figuræ in prodeunte numero, deficientes loci circulis adimplendi sunt, ut hic fit in exemplo tertio.

Simplices termini Algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros & species in species ac statuendo factum Affirmativum *si ambo factores sint affirmativi aut ambo negativi, &* Negativum *si secus.*

Sic $2a$ in $3b$ vel $-2a$ in $-3b$ facit $6ab$; vel $6ba$: Nihil enim refert quo ordine ponantur. Sic etiam $2a$ in $-3b$ vel $-2a$ in $3b$ facit $-6ab$. Et sic $2ac$ in $8bcc$ facit $16abccc$ sive $16abc^3$; & $7axx$ in $-12aaxx$ facit $-84a^3x^4$; & $-16cy$ in $31ay^3$ facit $-496acy^4$; & $-4z$ in $-3\sqrt{az}$ facit $12z\sqrt{az}$. Atque ita 3 in -4 facit -12 & -3 in -4 facit 12.

Fractiones multiplicantur ducendo numeratores in numeratores ac denominatores in denominatores. Sic $\frac{2}{3}$ in $\frac{5}{7}$ facit $\frac{10}{21}$; & $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ facit $\frac{ac}{bd}$; & $2\frac{a}{b}$ in $3\frac{c}{d}$ facit $6 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ seu $6\frac{ac}{bd}$; & $\frac{3acy}{2bb}$ in $\frac{-7cyy}{4b^3}$ facit $\frac{-21accy^3}{8b^5}$; & $\frac{-4z}{c}$ in $\frac{-3\sqrt{az}}{c}$ facit $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$ & $\frac{a}{b}x$ in $\frac{c}{d}xx$ facit $\frac{ac}{bd}x^3$. Item 3 in $\frac{2}{5}$ facit $\frac{6}{5}$ ut patet si 3 reducatur ad formam fractionis $\frac{3}{1}$ adhibendo unitatem pro Denominatore. Et sic $\frac{15aaz}{cc}$ in $2a$ facit $\frac{30a^3z}{cc}$. Unde obiter nota quod $\frac{ab}{c}$ & $\frac{a}{c}b$ idem valent; ut & $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$ & $\frac{a}{c}bx$ nec non $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ & $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$, & sic in aliis.

Quantitates radicales ejusdem denominationis (hoc est, si sint ambæ radices quadraticæ, aut ambæ cubicæ, aut ambæ quadrato-quadraticæ, &c.) multiplicantur ducendo terminos in se invicem sub eodem signo radicali. Sic $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ facit $\sqrt{15}$, & $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{cd}$ facit $\sqrt{abcd}$.

Et

Et $\sqrt{3:}\,5ayy$ in $\sqrt{3:}\,7ayz$ facit $\sqrt{3:}\,35aay^3z$. Et $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ in $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ facit $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ hoc est * $\frac{aab}{c}$. Et $2a\sqrt{az}$ in $3b\sqrt{az}$ facit $6ab\sqrt{aazz}$ hoc est $6aabz$. Et $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ in $\frac{-2x}{\sqrt{ac}}$ facit $\frac{-6x^3}{\sqrt{aacc}}$ hoc est $\frac{-6x^3}{ac}$. Et $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$ in $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ facit $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$.

* Vide Cap De Notatione.

Quantitates pluribus partibus constantes multiplicantur ducendo singulas unius partes in singulas alterius, perinde ut in Multiplicatione numerorum ostensum est. Sic $c-x$ in a facit $ac-ax$, & $aa+2ac-bc$ in $a-b$ facit $a^3+2aac-aab-3bac+bcc$. Nam $aa+2ac-bc$ in $-b$ facit $-aab-2acb+bbc$, & in a facit $a^3+2aac-abc$, quorum summa est $a^3+2aac-aab-3abc+bbc$. Hujus multiplicationis specimen unà cum aliis consimilibus exemplis subjectum habes.

$$\begin{array}{r} aa+2ac-bc \\ a-b \\ \hline -aab-2abc+bbc \\ a^3+2aac-abc \\ \hline a^3+2aac-aab-3abc+bbc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+bb \\ aa+ab \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline -ab-bb \\ aa+ab \\ \hline aa \quad * \; -bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} yy+2ay-\frac{1}{2}aa \\ yy-2ay+aa \\ \hline aayy+2a^3y-\frac{1}{2}a^4 \\ -2ay^3-4aayy+a^3y \\ y^4+2ay^3-\frac{1}{2}aayy \\ \hline y^4 \quad * \; -3\frac{1}{2}aayy+3a^3y-\frac{1}{2}a^4 \end{array}$$

 $2ax-$

$$\frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

$$3a + \sqrt{\frac{abb}{c}}$$

$$\frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c}$$

$$\frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

$$\frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} + \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c}.$$

DE DIVISIONE.

Diviſio in numeris inſtituitur quærendo quot vicibus Diviſor in Dividendo continetur, totieſque auferendo, & ſcribendo totidem unitates in Quoto. Idque iteratò ſi opus eſt, quamdiu diviſor auferri poteſt.

Sic ad dividendum 63 per 7, quære quoties 7 continetur in 63 & emergent 9 pro quoto præciſè. Adeoque $\frac{63}{7}$ valet 9. Inſuper ad dividendum 371 per 7, præfige diviſorem 7, & imprimis opus inſtituens in initialibus figuris Dividendi proximè majoribus Diviſore, nempe in 37, dic quoties 7 continetur in 37? Reſp. 5. Tum ſcripto 5 in Quoto, aufer 5 × 7 ſeu 35 de 37, & reſtabit 2, cui adnecte ultimam figuram Dividendi nempe 1, & fit 21 reliqua pars Dividendi, in qua proximum opus inſtituendum eſt. Dic itaque ut ante quoties 7 continetur in 21? Reſp. 3. Quare ſcripto 3 in Quoto, aufer 3 × 7 ſeu 21 de 21 & reſtabit 0. Unde conſtat 53 eſſe numerum præciſè qui oritur ex diviſione 371 per 7.

```
7) 371 (53
   35
    21
    21
     0
```

Atque ita ad dividendum 4798 per 23, opus primò inſtituens in initialibus figuris 47 dic quoties 23 continetur in 47? Reſp. 2. Scribe ergo 2 in Quoto, & de 47 ſubduc 2 × 23 ſeu 46, reſtatque 1, cui ſubjunge proximum numerum Dividendi, nempe 9, & fit 19 in ſubſequens

ſequens opus. Dic itaque quoties 23 continetur in 19? Reſp. 0. Quare ſcribe 0 in Quoto; & de 19 ſubduc 0 × 23 ſeu 0; & reſtat 19, cui ſubjunge ultimum numerum 8, & fit 198 in proximum opus. Quamobrem dic ultimò quoties 23 continetur in 198, (id quod ex initialibus numeris 2 & 19 conjici poteſt animadvertendo quoties 2 continetur in 19)? Reſp. 8. Quare ſcribe 8 in Quoto & de 198 ſubduc 8 × 23 ſeu 184, reſtabitque 14 adhuc dividendus per 23. Adeoque Quotus erit $208\frac{14}{23}$. Quod ſi hujuſmodi fractio minùs placeat, poſſis Diviſionem in Fractionibus decimalibus ultra ad libitum proſequi, ſemper adnectendo circulum numero reſiduo. Sic reſiduo 14 adnecte 0, fitque 140. Tum dic quoties 23 ſit in 140? Reſp. 6. Scribe ergo 6 in Quoto; & de 140 ſubduc 6 × 23 ſeu 138, & reſtabit 2, cui adnecte 0 ut ante. Et ſic, opere ad arbitrium continuato, emerget tandem Quotus 208,6086, &c.

```
23) 4798 (208,6086,&c.
    46
    --
     19
     00
     --
     198
     184
     ---
      140
      138
      ---
        20
        00
        --
        200
        184
        ---
         160
```

Ad eundem modum fractio decimalis 3,5218 per fractionem decimalem 46,1 dividitur, & prodit 0,07639, &c. *Ubi nota quod in Quoto tot figuræ pro decimalibus abſcindendæ ſunt quot ſunt in ultimo dividuo plures quam in diviſore:* Ut in hoc exemplo quinque, quia ſex ſunt in ultimo dividuo 0,004370 & una in Diviſore 46,1.

```
46,1) 3,5218 (0,07639
      322,7
      -----
       2948
       2766
       ----
       1820
       1383
       ----
       4370
```

Exempla plura lucis gratia subjunximus.

```
9043) 20844115 (2305.          72,4) 2099,6 (29
      18086                           1448
      -----                           ----
       27581                           6516
       27129                           6516
       -----                           ----
        45215                             0
        45215
        -----
            0

50,18) 137,995 (2,75           0,0132) 0,051513 (3,9025
       10036                            396
       -----                            ----
        37635                           1191
        35126                           1188
        -----                           ----
         25090                             330
         25090                             264
         -----                             ---
             0                             660
                                           660
                                           ---
                                             0
```

In terminis Algebraicis Divisio fit resolvendo quicquid per multiplicationem conflatur. Sic ab divis. per a dat b pro quoto, $6ab$ div. per $2a$ dat $3b$; & div. per $-2a$ dat $-3b$. $-6ab$ div. per $2a$ dat $-3b$; & div. per $-2a$ dat $3b$. $16abc^3$ div. per $2ac$ dat $8bcc$. $-84a^3x^4$ div. per $-12aaxx$ dat $7axx$. Item $\frac{6}{35}$ div. per $\frac{3}{5}$ dat $\frac{2}{7}$. $\frac{ac}{bd}$ div. per $\frac{a}{b}$ dat $\frac{c}{d}$. $\frac{-21accy^3}{8b^5}$ div. per $\frac{3acy}{2bb}$ dat $\frac{-7cyy}{4b^3}$. $\frac{6}{7}$ div. per 3 dat $\frac{2}{7}$; & vicissim $\frac{6}{7}$ div. per $\frac{2}{7}$ dat $\frac{3}{1}$ seu 3. $\frac{30a^3z}{cc}$ div. per $2a$ dat $\frac{15aaz}{cc}$; & vicissim divis. per $\frac{15aaz}{cc}$ dat $2a$. Item $\sqrt{15}$ div. per $\sqrt{3}$ dat $\sqrt{5}$. $\sqrt{abcd}$ div. per $\sqrt{cd}$ dat $\sqrt{ab}$. $\sqrt{a^3c}$ per

per $\sqrt{ac}$ dat $\sqrt{aa}$ ſeu a. $\sqrt[3]{35aay^3z}$ div. per $\sqrt[3]{5ayy}$ dat $\sqrt[3]{7ayz}$. $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ div. per $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ dat $\sqrt{\frac{abb}{c}}$. $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$ div. per $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ dat $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$. Atque ita $\overline{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $a+b$ dat $\sqrt{ax}$, & viciſſim div. per $\sqrt{ax}$ dat $a+b$. Et $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $\frac{1}{a+b}$ dat $a\sqrt{ax}$; vel div. per a dat $\frac{1}{a+b}\sqrt{ax}$ ſive $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$; & viciſſim div. per $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$ dat a. Cæterùm in hujuſmodi reſolutionibus omninò cavendum eſt ut quantitates ſint ejuſdem ordinis quæ ad invicem applicantur. Nempe ut numeri applicentur ad numeros, ſpecies ad ſpecies, radicales ad radicales, Numeratores Fractionum ad Numeratores ac Denominatores ad Denominatores, nec non in Numeratoribus, Denominatoribus, & Radicalibus quantitates cujuſque generis ad quantitates homogeneas.

Quod ſi quantitas dividenda nequeat ſic per diviſorem reſolvi, ſufficit ubi ambæ quantitates ſunt integræ ſubſcribere Diviſorem cum lineola interjecta. Sic ad dividendum ab per c ſcribitur $\frac{ab}{c}$; & ad dividendum $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ per a ſcribitur $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ vel $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$. Et ſic $\sqrt{ax-xx}$ diviſ. per $\sqrt{cx}$ dat $\frac{\sqrt{ax-xx}}{\sqrt{cx}}$ ſive $\sqrt{\frac{ax-xx}{cx}}$. Et $\overline{aa+ab}\sqrt{aa-2xx}$ diviſ. per $\overline{a-b}\sqrt{aa-xx}$ dat $\frac{aa+ab}{a-b}\sqrt{\frac{aa-2xx}{aa-xx}}$. Et $12\sqrt{5}$ div. per $4\sqrt{7}$ dat $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Ubi vero fractæ ſunt illæ quantitates, Duc Numeratorem Dividendæ quantitatis in Denominatorem Diviſoris ac Denominatorem in Numeratorem, & *factus prior* erit Numerator, ac *poſterior* Denominator

nator Quoti. Sic ad dividendum $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ scribitur $\frac{ad}{bc}$, multiplicato scilicet a per d & b per c. Parique ratione $\frac{3}{7}$ divis. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{35}$ & $\frac{3a}{4c}\sqrt{ax}$ divis. per $\frac{2c}{5a}$ dat $\frac{15aa}{8cc}\sqrt{ax}$; divis. autem per $\frac{2c\sqrt{aa-xx}}{5a\sqrt{ax}}$ dat $\frac{15a^3x}{8cc\sqrt{aa-xx}}$. Et ad eundem modum $\frac{ad}{b}$ divis. per c (sive per $\frac{c}{1}$) dat $\frac{ad}{bc}$. Et c (sive $\frac{c}{1}$) divis. per $\frac{ad}{b}$ dat $\frac{bc}{ad}$. Et $\frac{3}{7}$ div. per 5 dat $\frac{3}{35}$. Et 3 div. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{5}$. Et $\frac{a+b}{c}\sqrt{cx}$ div. per a dat $\frac{a+b}{ac}\sqrt{cx}$. Et $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ div. per $\frac{a}{c}$ dat $\frac{ac+bc}{a}\sqrt{cx}$. Et $2\sqrt{\frac{axx}{c}}$ divis. per $3\sqrt{cd}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{axx}{ccd}}$; Div. autem per $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{ccd}}$. Et $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{7}{11}}$ divis. per $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ dat $\frac{6}{5}\sqrt{\frac{49}{33}}$. Et sic in aliis.

Quantitas ex pluribus terminis composita dividitur applicando singulos ejus terminos ad Divisorem. Sic $aa+3ax-xx$ divisum per a dat $a+3x-\frac{xx}{a}$. At ubi Divisor etiam ex pluribus terminis constat, divisio perinde ac in Numeris institui debet. Sic ad dividendum $a^3+2aac-aab-3abc+bbc$ per $a-b$, Dic quoties a continetur in a^3, nempe primus terminus Divisoris in primo Dividendi? Resp. aa. Quare scribe aa in Quoto & ablato $a-b$ in aa sive a^3-aab de Dividendo, restabit $2aac-3abc+bbc$ adhuc dividendum. Dic itaque rursus quoties a continetur in $2aac$? Resp. $2ac$. Quare scribe etiam $2ac$ in Quoto, & ablato $a-b$ in $2ac$ sive $2aac-2abc$ de præfato Residuo, restabit etiamnum $-abc+bbc$. Quamobrem dic iterum quoties a continetur in $-abc$? Resp. $-bc$. Et proinde scribe $-bc$ in Quoto, & ablato denuo $a-b$ in $-bc$ sive $-abc+bbc$ de novissimo Residuo, restabit nihil. Quod indicat Divisionem peractam esse, prodeunte Quoto $aa+2ac-bc$.

Cæ-

Cæterum ut hujusmodi operationes ad formam qua in Divisione numerorum usi sumus debitè reducantur, *termini tum dividendæ quantitatis tum Divisoris juxta dimensiones literæ alicujus quæ ad hanc rem maximè idonea judicabitur, in ordine disponendi sunt*, ita nempe ut illi primum locum occupent in quibus litera ista est plurimarum dimensionum, iique secundum in quibus dimensiones ejus ad maximas proximæ sunt; Et sic deinceps usque ad terminos qui per literam istam non omnino multiplicantur, adeoque ultimum locum occupabunt. Sic in allato Exemplo si termini ordinentur juxta dimensiones literæ a, formam operis exhibebit adjunctum

$$
\begin{array}{l}
a-b)\;a^3\begin{array}{l}+2aac\\-\;aab\end{array}-3abc+bbc\,(aa+2ac-bc\\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{a^3-aab}\\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;0+2aac-3abc\\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{2aac-2abc}\\
\;0-abc+bbc\\
\;\underline{-abc+bbc}\\
\;0\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

Diagramma: Ubi videre est quod terminus a^3 sive a trium dimensionum occupat primum locum dividendæ quantitatis, terminique $\begin{array}{l}2aac\\-aab\end{array}$ in quibus a est duarum dimensionum secundum occupat, & sic præterea. Potuit etiam dividenda quantitas sic scribi $a^3\begin{array}{l}+2c\\-\;\;b\end{array}aa-3bca+bbc$. Ubi termini secundum locum occupantes, uniuntur aggregando factores literæ juxta quam fit ordinatio. Et hoc modo si termini juxta dimensiones literæ b disponerentur, opus sicut in proximo Diagrammate institui deberet, cujus explicationem adnectere visum est.

$$
\begin{array}{l}
-b+a)\;cbb\begin{array}{l}-3ac\\-\;\;aa\end{array}b\begin{array}{l}+a^3\\+2aac\end{array}(-cb\begin{array}{l}+2ac\\+\;aa.\end{array}\\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{cbb-acb}\\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0\begin{array}{l}-2ac\\-\;\;aa\end{array}b\begin{array}{l}+a^3\\+2aac\end{array}\\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{\begin{array}{l}-2ac\\-\;\;aa\end{array}b\begin{array}{l}+2aac\\+a^3\end{array}}\\
\;0\;\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

D Dic

Dic quoties $-b$ continetur in cbb? Resp. $-cb$. Quare scripto $-cb$ in Quoto, aufer $-b+a$ in $-cb$ seu $bbc-abc$ & restabit in secundo loco $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$. Residuo huic adnecte, si placet, quantitates in ultimo loco, nempe $\begin{matrix}a^3\\+2aac,\end{matrix}$ & dic iterum quoties $-b$ continetur in $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$? Resp. $\begin{matrix}+2ac.\\+aa.\end{matrix}$ Quare his in Quoto scriptis, aufer $-b+a$ in $\begin{matrix}+2ac\\+aa\end{matrix}$ seu $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b\begin{matrix}+2aac\\+a^3\end{matrix}$ & restabit nihil. Unde constat divisionem peractam esse, prodeunte Quoto $-cb+2ac+aa$ ut ante.

Atque ita si dividere oporteat $aay^4-aac^4+yyc^4+y^6-2y^4cc-a^6-2a^4cc-a^4yy$ per $yy-aa-cc$: Quantitates juxta literam y ad hunc modum ordino, $yy\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)\,y^6\begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc.\\-aac^4\end{matrix}$

Dein Divisionem ut in subjecto Diagrammate instituo. Adjiciuntur & alia exempla, de quibus insuper observandum est quod ubi dimensiones literæ ad quam ordinatio fit, non in eadem ubique progressione Arithmetica sed per saltum alicubi procedunt, locis vacuis substituitur nota *

$$\begin{array}{l}
yy\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)\,y^6\begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{matrix}\Big(\,y^4\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}yy\begin{matrix}+a^4\\+aacc.\end{matrix}\\
\hline
y^6\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}y^4\\
\hline
0\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}y^4\\
\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-2a^4\,*\\-aaccyy\\+c^4\end{matrix}\\
\hline
\end{array}$$

$$0 \quad \begin{matrix} +a^4 \\ +aacc \end{matrix} yy$$

$$\begin{matrix} +a^4 \\ +aacc \end{matrix} yy - 2a^4cc \begin{matrix} -a^6 \\ \\ -aac^4 \end{matrix}$$

$$0 \qquad 0$$

$$a+b)\ aa \quad * \ -bb\ (a-b$$

$$aa+ab$$

$$0-ab$$

$$-ab-bb$$

$$0 \qquad 0$$

$$yy-2ay+aa)\ y^4 \quad * -3\tfrac{1}{2}aayy+3a^3y-\tfrac{1}{2}a^4\ (yy+2ay-\tfrac{1}{2}aa.$$

$$y^4-2ay^3+\ \ aayy$$

$$0+2ay^3-4\tfrac{1}{2}aayy$$

$$+2ay^3-4\ aayy+2a^3y$$

$$0-\ \tfrac{1}{2}aayy+\ a^3y$$

$$-\ \tfrac{1}{2}aayy+\ a^3y-\tfrac{1}{2}a^4$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

$$aa+ab\sqrt{2}+bb)\ a^4 \quad * \quad * \quad * \quad +b^4\ (aa-ab\sqrt{2}+bb$$

$$a^4+a^3b\sqrt{2}+aabb$$

$$-a^3b\sqrt{2}-aabb$$

$$-a^3b\sqrt{2}-2aabb-ab^3\sqrt{2}$$

$$+aabb+ab^3\sqrt{2}$$

$$+aabb+ab^3\sqrt{2}+b^4$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

Aliqui Divisionem incipiunt ab ultimis terminis, sed eodem recidit si inverso terminorum ordine incipiatur à prioribus. Sunt & aliæ methodi dividendi sed facillimam & commodissimam nosse sufficit.

DE EXTRACTIONE RADICUM.

Cum numeri alicujus *radix quadratica* extrahi debet, *is in locis alternis, incipiendo ab unitate, punctis notandus eſt; Dein figura in Quoto ſeu Radice ſcribenda cujus quadratum figuræ vel figuris ante primum punctum aut æquale ſit aut proximè minus. Et ablato illo quadrato, cæteræ radicis figuræ ſigillatim invenientur dividendo reſiduum per duplum radicis eatenus extractæ, & ſingulis vicibus auferendo è reſiduo illo factum à figura noviſſimè prodeunte & decuplo prædicti Diviſoris figura illa aucti.*

Sic ad extrahendam radicem ex 99856, imprimis nota cum punctis ad hunc modum 9·98·56. Dein quære numerum cujus quadratum æquatur primæ figuræ 9, nempe 3; ſcribeque in Quoto. Et de 9 ablato quadrato 3 × 3 ſeu 9, reſtabit 0; cui adnecte figuras ante proximum punctum, nempe 98 pro ſequente opere. Tum neglecta ultima figura 8, dic quoties duplum 3 ſeu 6 continetur in priori 9? Reſp. 1. Quare ſcripto 1 in Quoto, aufer factum 1 × 61 ſeu 61 de 98 reſtabit 37, cui adnecte ultimas figuras 56, & fiet 3756 numerus in quo opus denuo inſtitui debet. Quare & hujus ultima figura 6 neglecta, dic quoties duplum 31 ſeu 62 continetur in 375 (id quod ex initialibus figuris 6 & 37 conjici poteſt animadvertendo quoties 6 continetur in 37?) Reſp. 6. Et ſcripto 6 in Quoto aufer factum 6 × 626 ſeu 3756, & reſtabit nihil. Unde conſtat opus peractum eſſe; prodeunte Radice 316.

```
9·98·56 (316
9
—
098
 61
——
3756
3756
————
   0
```

Atque ita ſi radicem ex 22178791 extrahere oportet, imprimis facta punctatione quære numerum cujus quadratum, (ſiquidem id nequeat æquari) ſit proxime minus figuris 22 antecedentibus primum punctum, & invenies eſſe 4. Nam 5 × 5 ſive 25 major eſt quam 22, & 4 × 4 ſive 16 minor. Quare 4 erit prima figura radicis. Et hac itaque in Quoto ſcripta, de 22 aufer quadratum 4 × 4 ſeu 16, reſi-

residuoque 6 adjunge desuper proximas figuras 17, & habebitur 617, cujus divisione per duplum 4 elicienda est secunda figura radicis. Nempe, neglecta ultima figura 7, dic quoties 8 continetur in 61? Resp. 7. Quare scribe 7 in Quoto, & de 617 aufer factum 7 in 87 seu 609 & restabit 8, cui adjunge proximas duas figuras 87, & habebitur 887, cujus divisione per duplum 47 seu 94 elicienda est tertia figura. Utpote dic quoties 94 continetur in 88? Resp. 0. Quare scribe 0 in quoto, adjungeque ultimas duas figuras 91, & habebitur 88791 cujus divisione per duplum 470 seu 940 elicienda est ultima figura. Nempe dic quoties 940 continetur in 8879? Resp. 9. Quare scribe 9 in Quoto, & radicem habebis 4709.

```
22·17·87·91 (4709,43637 &c.
16
——
617
609
——
  88791
  84681
  —————
    4110.00
    376736
    ———————
     3426400
     2825649
     ———————
      60075100
      56513196
      ————————
       356190400
       282566169
       —————————
        73624231
```

Cæterum cum factus 9×9409 seu 84681 ablatus de 88791 relinquat 4110, id indicio est numerum 4709 non esse radicem numeri 22178791 præcise, sed ea paulo minorem existere. Et in hoc casu aliisque similibus si veram radicem magis appropinquare placeat, prosequenda est operatio in decimalibus numeris, adnectendo ad residuum circulos duos in singulis operationibus. Sic residuum 4110 adnexis circulis, evadit 411000; cujus divisione per duplum 4709 seu 9418 elicietur figura prima decimalis, nimirum 4. Dein scripto 4 in Quoto, aufer 4×94184 seu 376736 de 411000 & restabit 34264. Atque ita adnexis iterum duobus circulis, opus pro lubitu continuari potest, prodeunte tandem radice 4709,43637, *&c.*

Ubi vero radix ad medietatem aut ultra extracta est, cæteræ figuræ per divisionem solam obtineri possunt. Ut in hoc exemplo, si radicem ad usque novem figuras extrahere animus esset, postquam quinque priores 4709,4 extractæ sunt, quatuor posteriores 3637

elici

elici poſſent dividendo reſiduum 34264 per duplum 4709,4.

Et ad hunc modum ſi radix ex 32976 ad uſque quinque figuras extrahi debet; poſtquam figuræ punctis notantur, ſcribe 1 in Quoto, utpote cujus quadratum 1 × 1 ſeu 1 maximum eſt quod in 3, figura primum punctum antecedente, continetur. Ac de 3 ablato quadrato illo 1, reſtabit 2. Dein huic 2 annexis proximis figuris 29. Quære quoties duplum 1 ſeu 2 continetur in 22, & invenies quidem pluſquam 10, ſed nunquam licet diviſorem vel decies ſumere, imo neque novies in hoc caſu quia factus 9 × 29 ſive 261 major eſt quam 229 unde deberet auferri. Quare pone tantum 8. Et perinde ſcripto 8 in Quoto, & ablato 8 × 28 ſive 224 reſtabit 5. Huic inſuper annexis figuris 76, quære quoties duplum 18 ſeu 36 continetur in 57, & invenies 1, adeoque ſcribe 1 in Quoto ac de 576 ablato 1 × 361 ſeu 361 reſtabit 215. Denique ad cæteras figuras eliciendas divide hunc 215 per duplum 181 ſeu 362 & exibunt figuræ 59, quibus etiam ſcriptis in Quoto, habebitur Radix 181,59.

3·29·76 (181,59
1
—
229
224
—
576
361
—
362) 215 (59

Eadem methodo radices etiam è decimalibus numeris extrahuntur. Sic ex 329,76 radix eſt 18,159. Et ex 3,2976 radix eſt 1,8159. Et ex 0,032976 radix eſt 0,18159. Et ſic præterea. Sed ex 3297,6 radix eſt 57,4247. Et ex 32,976 radix eſt 5,74247. Atque ita ex 9,9856 radix eſt 3,16. Sed ex 0,99856 radix eſt 0,999279, *&c.* Quemadmodum è ſubjectis Diagrammis conſtare poteſt.

32·97,6·(57,4247, &c.
25
—
797
749
—
4860
4576
—
1148) 284 (247

0,99·85·6 (0,999279, &c.
81
—
1885
1701
—
18460
17901
—
1998) 559 (279

Ex.

Extractionem radicis cubicæ & aliarum omnium, regula generali comprehendam, praxi potiùs intellectu facili quàm expeditæ consulens, ne moram in eo quod rarò usu veniet, discentibus inferam. *Nimirum tertia quæque figura incipiendo ab unitate, primò punctis notanda est si radix sit* cubica, *aut unaquæque* quinta *si sit* quadrato-cubica, *&c. Dein figura in Quoto scribenda est cujus maxima potestas (hoc est* cubica *si radix sit* cubica, *aut* quadrato-cubica *si radix sit* quadrato-cubica, *&c.) aut æquetur figuræ vel figuris ante primùm punctum, aut proximè minor sit. Et ablata illa potestate, figura proxima elicietur dividendo residuum proxima numeri resolvendi figura auctum, per potestatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ potestatis, hoc est, per* triplum Quadratum *Quoti si radix sit* cubica; *aut per* quintuplum quadrato-quadratum *si radix sit* quadrato-cubica, *&c. Rursusque à numero resolvendo ablata maxima Quoti potestate, figura tertia invenietur dividendo residuum illud proxima numeri resolvendi figura auctum per potestatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ potestatis.* Et sic in infinitum.

Sic ad extrahendam radicem cubicam ex 13312053, numerus ille primò punctis ad hunc modum 13·312.053 notandus est. Deinde in Quoto scribenda est illa figura 2 cujus cubus 8, siquidem æquari nequeat, proximè minor sit figuris 13 antecedentibus primum punctum. Et ablato illo cubo restabit 5, quod proxima numeri resolvendi figura 3 auctum, & per triplum quadratum quoti 2 divisum, quærendo nempe quoties 3 × 4 seu 12 continetur in 53, dat 4 pro secunda figura Quoti. Sed cùm Quoti 24 prodiret cubus 13824 major quàm qui auferri posset de figuris 13312 antecedentibus secundum punctum, scribi debet tantum 3 in Quoto.

```
              13·312·053 (237
              ——
 aufer cub. 8
   12) restat 53 (4. aut 3.
 ———————————————————————
    aufer c. 12167
 1587) restat 11450 (7.
 ———————————————————————
    aufer c. 133 12053
                 restat 0
```

Tum Quotus 23 in charta aliqua seorsim per 23 multiplicatus dat quadratum 529, quod iterum per 23 multiplicatum dat cubum 12167; & hic de 13312 ablatus relinquit 1145; quod proxima resolvendi numeri figura

gura o auctum, & per triplum quadratum Quoti 23 diviſum, quærendo nempe quoties 3×529 ſeu 1587 continetur in 11450, dat 7 pro tertia figura Quoti. Tum Quotus 237 per 237 multiplicatus dat quadratum 56169 quod iterum per 237 multiplicatum dat cubum 13312053, & hic de reſolvendo numero ablatus relinquit nihil. Unde patet radicem quæſitam eſſe 237.

Atque ita ad extrahendam radicem quadrato-cubicam ex 364·30820, punctum ponitur ad quintam figuram, & figura 3, cujus quadrato-cubus 243 proximè minor eſt figuris 364 antecedentibus punctum iſtud, ſcribitur in Quoto. Dein quadrato-cubo 243 de 364 ablato, reſtat 121 quod proxima reſolvendi numeri figura 3 auctum & per quinquies quadrato-quadratum Quoti diviſum, quærendo nempe quoties 5×81 ſeu 405 continetur in 1213, dat 2 pro ſecunda figura. Quotus ille 32 in ſe ter ductus efficit quadrato-quadratum 1048576, & hoc iterum in 32 ductum efficit quadrato-cubum 33554432; qui à numero reſolvendo ablatus relinquit 2876388. Itaque 32 eſt integra pars radicis, ſed nón juſta radix, & proinde ſi opus in decimalibus numeris proſequi animus eſt, reſiduum circulo auctum dividi debet per quinquies prædictum quadrato-quadratum Quoti, quærendo quoties 5×1048576 ſeu 5242880 continetur in 2876388,0, & prodibit tertia figura ſive prima decimalis 5. Atque ita auferendo quadrato-cubum Quoti 32,5 de numero reſolvendo ac dividendo reſiduum per quinquies quadrato-quadratum ejus, erui poteſt quarta figura. Et ſic in infinitum.

```
                 .
         364·30820 (32,5
         ---------
         243
    405) 1213 (2
         ----
         33554432
5242880) 2876388,0 (5
```

Cum radix quadrato-quadratica extrahenda eſt, oportet bis extrahere radicem quadraticam, eo quod $\sqrt{}^{4}$ *valeat* $\sqrt{}^{2\times 2}$. *Et cùm radix cubo-cubica extrahenda eſt, oportet extrahere radicem cubicam & ejus radicis radicem quadraticam, eo quod* $\sqrt{}^{6}$ *valeat* $\sqrt{}^{2\times 3}$*: Unde aliqui radices haſce non cubo-cubicas ſed quadrato-cubicas dixêre.* Et idem in aliis radicibus quarum indices non ſunt numeri primi obſervandum eſt.

E

E simplicibus quantitatibus Algebraicis extractio radicum ex ipsa Notatione patet. Quemadmodum quod $\sqrt{aa}$ sit a, & quod $\sqrt{aacc}$ sit ac, & quod $\sqrt{9aacc}$ sit $3ac$, & quod $\sqrt{49a^4xx}$ sit $7aax$. Atque ita quod $\sqrt{\frac{a^4}{cc}}$ seu $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{cc}}$ sit $\frac{aa}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ sit $\frac{aab}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ sit $\frac{3az}{5b}$, & quod $\sqrt{\frac{4}{9}}$ sit $\frac{2}{3}$. Et quod $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{27a^3}}$ sit $\frac{2bb}{3a}$. Et quod $\sqrt[4]{aabb}$ sit $\sqrt{ab}$. Quin etiam quod $b\sqrt{aacc}$ seu b in $\sqrt{aacc}$ valeat b in ac sive abc. Et quod $3c\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ valeat $3c \times \frac{3az}{5b}$ sive $\frac{9acz}{5b}$. Et quod $\frac{a+3x}{c}\sqrt{\frac{4bbx^4}{81aa}}$ valeat $\frac{a+3x}{c} \times \frac{2bxx}{9a}$ sive $\frac{2abxx+6bx^3}{9ac}$.

Hæc inquam patent siquidem propositas quantitates è radicibus in se ductis produci (ut aa ex a in a, $aacc$ ex ac in ac, $9aacc$ ex $3ac$ in $3ac$, &c.) prima fronte constare potest. Ubi vero quantitates pluribus terminis constant, opus perinde ac in numeris absolvitur. Sic ad extrahendam radicem quadraticam ex $aa+2ab+bb$, imprimis radicem primi termini aa nempe a scribe in Quoto. Et ablato ejus quadrato $a \times a$ restabit $2ab+bb$ pro elicienda reliqua parte radicis. Dic itaque quoties duplum quoti seu $2a$ continetur in primo residui termino $2ab$? Resp. b.

$$
\begin{array}{l}
aa+2ab+bb\,(a+b \\
aa \\
\overline{} \\
0 \quad 2ab+bb \\
\overline{} \\
 0 \quad 0
\end{array}
$$

Adeoque scribe b in Quoto, & ablato facto b in $\overline{2a+b}$ seu $2ab+bb$ restabit nihil. Quod indicat opus peractum esse, prodeunte radice $a+b$.

Et sic ad extrahendam radicem ex $a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$, imprimis pone in Quoto radicem primi termini a^4 nempe aa, & ablato ejus quadrato $aa \times aa$ seu a^4 restabit $6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$ pro reliqua radice elicienda. Dic itaque quoties $2aa$

continetur in $6a^3b$? Resp. $3ab$. Quare scribe $3ab$ in Quoto & ablato facto $3ab$ in $\overline{2aa+3ab}$ seu $6a^3b+9aabb$ restabit etiamnum $-4aabb-12ab^3+4b^4$ pro opere prosequendo. Adeoque

$$a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4\,(aa+3ab-2bb$$
$$a^4$$
$$\overline{}$$
$$0$$
$$6a^3b+9aabb$$
$$\overline{}$$
$$0-4aabb$$
$$-4aabb-12ab^3+4b^4$$
$$\overline{}$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

dic iterum quoties duplum Quoti, nempe $2aa+6ab$ continetur in $-4aabb-12ab^3$, sive quod perinde est dic quoties duplum primi termini Quoti seu $2aa$ continetur in primo residui termino $-4aabb$? Resp. $-2bb$. Et proinde scripto $-2bb$ in Quoto, & ablato facto $-2bb$ in $2aa+6ab-2bb$ seu $-4aabb-12ab^3+4b^4$, restabit nihil. Unde constat radicem esse $aa+3ab-2bb$.

Atque ita quantitatis $xx-ax+\frac{1}{4}aa$ radix est $x-\frac{1}{2}a$, & quantitatis y^4+4y^3-8y+4 radix $yy+2y-2$, & quantitatis $16a^4-24aaxx+9x^4+12bbxx-16aabb+4b^4$ radix $3xx-4aa+2bb$ ut è subjectis diagrammis constare potest.

$$xx-ax+\tfrac{1}{4}aa\,(x-\tfrac{1}{2}a.$$
$$xx$$
$$\overline{}$$
$$0$$
$$-ax+\tfrac{1}{4}aa$$
$$\overline{\phantom{-ax+\tfrac{1}{4}aa}}$$
$$0 \quad 0$$

$9x^4$

$$9x^4 \begin{smallmatrix}-24aa\\+12bb\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+16a^4\\-16aabb\\+4b^4\end{smallmatrix} \left(3xx \begin{smallmatrix}-4aa\\+2bb\end{smallmatrix}\right.$$

$$\begin{array}{l}9x^4\\ \hline 0\\ \quad \begin{smallmatrix}-24aa\\+12bb\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+16a^4\\-16aabb\\+4b^4\end{smallmatrix}\\ \hline \quad\quad 0 \qquad\quad 0\end{array}$$

$$\begin{array}{l}y^4+4y^3 \quad * -8y+4\ (yy+2y-2\\ y^4\\ \hline 0\\ \quad \underline{4y^3+4yy}\\ \quad\quad 0-4yy\\ \quad\quad \underline{-4yy-8y+4}\\ \quad\quad\quad 0 \quad\ 0 \quad 0\end{array}$$

Si radicem cubicam ex $a^3+3aab+3abb+b^3$ oportet extrahere, operatio est hujusmodi. Extrahe radicem cubicam primi termini a^3

$$\begin{array}{l}\quad a^3+3aab+3abb+b^3\,(a+b.\\ \quad \underline{}\\ \quad a^3\\ 3aa)\ 0+3aab\,(b\\ \hline \quad a^3+3aab+3abb+b^3\\ \quad 0 \qquad 0 \qquad\quad 0 \quad\ 0\end{array}$$

nempe a, & pone in Quoto. Tum ablato ejus cubo a^3; dic quoties triplum quadratum ejus seu $3aa$ continetur in proximo residui termino $3aab$? & prodit b. Quare scribe etiam b in Quoto, & cubo Quoti $a+b$ ablato restabit nihil. Radix itaque est $a+b$.

Eodem modo radix cubica, si extrahatur ex $z^6+6z^5-40z^3+96z-64$, prodit $zz+2z-4$. Atque ita in altioribus radicibus.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM ET RADICALIUM.

Præcedentibus operationibus inservit reductio fractarum & radicalium quantitatum, idque vel ad minimos terminos vel ad eandem denominationem.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM *ad minimos terminos.*

Fractiones ad minimos terminos reducuntur dividendo numeratores ac denominatores per maximum communem divisorem. Sic fractio $\frac{aac}{bc}$ reducitur ad simpliciorem $\frac{aa}{b}$ dividendo utrumque aac & bc per c; & $\frac{203}{667}$ reducitur ad simpliciorem $\frac{7}{23}$ dividendo utrumque 203 & 667 per 29; & $\frac{203aac}{667bc}$ reducitur ad $\frac{7aa}{23b}$ dividendo per $29c$. Atque ita $\frac{6a^3-9acc}{6aa+3ac}$ evadit $\frac{2aa-3cc}{2a+c}$ dividendo per $3a$. Et $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{aa-ab}$ evadit $\frac{aa+bb}{a}$ dividendo per $a-b$.

Et hac Methodo termini post Multiplicationem vel Divisionem plerumque abbreviari possunt. Quemadmodum si multiplicare oportet $\frac{2ab^3}{3ccd}$ per $\frac{9acc}{bdd}$ vel id dividere per $\frac{bdd}{9acc}$ prodibit $\frac{18aab^3cc}{3bccd^3}$, & per reductionem $\frac{6aabb}{d^3}$. Sed in hujusmodi casibus præstat ante operationem concinnare terminos, dividendo per maximum communem divisorem quos postea dividere oporteret. Sic in allato exemplo si dividam $2ab^3$ & bdd per communem divisorem b, & $3ccd$ ac $9acc$ per communem divisorem $3cc$; emerget fractio $\frac{2abb}{d}$ multiplicanda per $\frac{3a}{dd}$ vel dividenda per $\frac{dd}{3a}$ prodeunte tandem $\frac{6aabb}{d^3}$ ut supra. Atque ita $\frac{aa}{c}$, in $\frac{c}{b}$ eva-

evadit $\frac{aa}{1}$ in $\frac{1}{b}$ seu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{aa}{c}$ divis. per $\frac{b}{c}$ evadit aa divis. per b seu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{a^3-axx}{xx}$ in $\frac{cx}{aa+ax}$ evadit $\frac{a-x}{x}$ in $\frac{c}{1}$ seu $\frac{ac}{x}-c$. Et 28 divis. per $\frac{7}{3}$ evadit 4 divis. per $\frac{1}{3}$, seu 12.

De inventione Divisorum.

HUC spectat inventio divisorum per quos quantitas aliqua dividi possit. *Si quantitas simplex est divide eam per minimum ejus divisorem, & quotum per minimum divisorem ejus, donec quotus restet indivisibilis, & omnes quantitatis divisores primos habebis. Dein horum divisorum singulos binos, ternos, quaternos,* &c. *duc in se, & habebis etiam omnes divisores compositos.* Ut si numeri 60 divisores omnes desiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2, & quotum 15 per 3 & restabit quotus indivisibilis 5. Ergo divisores primi sunt 1,2,2,3,5: Ex binis compositi 4,6,10,15: Ex ternis 12,20,30, ex omnibus 60. Rursus si quantitatis $21abb$ divisores omnes desiderentur, divide eam per 3, & quotum $7abb$ per 7, & quotum abb per a, & quotum bb per b, & restabit quotus primus b. Ergo divisores primi sunt 1,3,7,a,b,b; ex binis compositi 21 $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, bb; ex ternis $21a$, $21b$, $3ab$, $3bb$, $7ab$, $7bb$, abb; ex quaternis $21ab$, $21bb$, $3abb$, $7abb$; ex quinis $21abb$. Eodem modo ipsius $2abb-6aac$ divisores omnes sunt 1,2,a,$bb-3ac$, $2a$, $2bb-6ac$, $abb-3aac$, $2abb-6aac$.

Si quantitas postquam divisa est per omnes simplices divisores manet composita & suspicio est eam compositum aliquem divisorem habere, dispone eam secundum dimensiones literæ alicujus quæ in ea est, & pro litera illa substitue sigillatim tres vel plures terminos hujus progressionis Arithmeticæ, 3, 2, 1, 0, −1, −2, *ac terminos totidem resultantes una cum omnibus eorum divisoribus statue è regione correspondentium terminorum progressionis, positis divisorum signis tam affirmativis quam negativis. Dein è regione etiam statue progressiones arithmeticas quæ per*

omnium numerorum divisores percurrunt pergentes à majoribus terminis ad minores eodem ordine quo termini progressionis $3, 2, 1, 0, -1, -2$ *pergunt, & quarum termini differunt vel unitate vel numero aliquo qui dividit altissimum terminum propositæ quantitatis. Siqua occurrit ejusmodi progressio, iste terminus ejus qui stat è regione termini* 0 *progressionis primæ, divisus per differentiam terminorum, & cum signo suo annexus literæ præfatæ, componet quantitatem per quam divisio tentanda est.*

Ut si quantitas sit $x^3 - xx - 10x + 6$ pro x substituendo sigillatim terminos progressionis $1, 0, -1$, oriuntur numeri $-4, 6, +14$ quos cum omnibus eorum divisoribus colloco è regione terminorum progressionis $1, 0, -1$ hoc modo.

1	-4	1. 2. 4.	$+4.$
0	6	1. 2. 3. 6	$+3.$
-1	14	1. 2. 7. 14	$+2.$

Dein quoniam altissimus terminus x^3 per nullum numerum præter unitatem divisibilis est, quæro in divisoribus progressionem cujus termini differunt unitate, & a superioribus ad inferiora pergendo decrescunt perinde ac termini progressionis lateralis $1, 0, -1$. Et hujusmodi progressionem unicam tantum invenio nempe $4, 3, 2$, cujus itaque terminum $+3$ seligo qui stat è regione termini 0 progressionis primæ $1, 0, -1$, tentoque divisionem per $x+3$. Et res succedit, prodeunte $xx - 4x + 2$.

Rursus si quantitas sit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$. pro y substituo sigillatim $2, 1, 0, -1, -2$ & numeros resultantes $30, 7, 20, 3, 34$ cum omnibus eorum divisoribus è regione colloco ut sequitur. Et in divisoribus hanc solam esse animadverto decrescentem progressionem arithmeticam $+10, +7, +4, +1, -2$. Hujus terminorum differentia 3 dividit altissimum quantitatis terminum $6y^4$. Quare terminum $+4$ qui stat è regione termini 0, divisum per differentiam terminorum 3 adjungo literæ y, tentoque divisionem per $y+\frac{4}{3}$ vel quod perinde est per $3y+4$, & res succedit prodeunte $2y^3 - 3yy - 3y + 5$.

2	30	1. 2. 3. 5. 6. 10. 15. 30	$+10.$
1	7	1. 7	$+7.$
0	20	1. 2. 4. 5. 10. 20	$+4.$
-1	3	1. 3	$+1.$
-2	34	1. 2. 17. 34	$-2.$

Atque ita si quantitas sit $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140aa + 64a + 30$; opera-

operatio erit ut sequitur.

2	42	1.2.3.6.7.14.21.42.	+3.+3.+ 7.
1	23	1.23.	+1.−1.+ 1.
0	30	1.2.3.5.6.10 15.30.	−1.−5.− 5.
−1	297	1.3.9.11.27.33.99.297.	−3.−9.−11.

Tres occurrunt hic progressiones quarum termini $-1.-5.-5$ divisi per differentias terminorum $2,4,6$, dant tres divisores tentandos $a-\frac{1}{2}$, $a-\frac{5}{4}$ & $a-\frac{5}{6}$. Et divisio per ultimum divisorem $a-\frac{5}{6}$ seu $6a-5$ succedit prodeunte $4a^4-5a^3+4aa-20a-6$.

Si nullus occurrit hac methodo divisor, vel nullus qui dividit propositam quantitatem, concludendum erit quantitatem illam non admittere divisorem unius dimensionis. Potest tamen fortasse, si plurium sit quam trium dimensionum, divisorem admittere duarum. Et si ita, divisor ille investigabitur hac methodo. *In quantitate illa pro litera substitue, ut ante, quatuor vel plures terminos progressionis hujus* $3,2,1,0,-1,-2,-3$. *Divisores omnes numerorum resultantium sigillatim adde & subduc quadratis correspondentium terminorum progressionis illius ductis in divisorem aliquem numeralem altissimi termini quantitatis propositæ, & summas differentiasque è regione progressionis colloca. Dein progressiones omnes collaterales nota quæ per istas summas differentiasque percurrunt. Sit* $\mp C$ *terminus ejusmodi progressionis qui stat è regione termini* 0 *progressionis primæ,* $\mp B$ *differentia quæ oritur subducendo* $\mp C$ *de termino proxime superiori qui stat è regione termini* 1 *progressionis primæ,* A *prædictus termini altissimi divisor numeralis, &* l *litera quæ in quantitate proposita est, & erit* $All \pm Bl \pm C$ *divisor tentandus.*

Ut si quantitas proposita sit $x^4-x^3-5xx+12x-6$, pro x scribo successivè $3,2,1,0,-1,-2$, & prodeuntes numeros $39,6,1,-6,-21,-26$, una cum eorum divisoribus è regione dispono, addoque & subduco divisores terminis progressionis illius quadratis ductisque in divisorem numeralem termini x^4 qui unitas est, *viz.* terminis $9,4,1,0,1,4$, & summas differentiasque è latere pariter dispono. Dein progressiones quæ in iisdem obveniunt è latere etiam scribo, ut sequitur. Harum progressionum terminos 2 & -3 qui stant è regio-

è regione termini o progressionis illius quæ in columna prima est, usur-

3	39	1.3.13.39.	9	−30.−4.6.8.10.12.22.48.	−4. 6.
2	6	1.2. 3. 6.	4	−2.1.2.3.5. 6. 7.10.	−2. 3.
1	1	1.	1	0. 2.	0. 0.
0	6	1.2. 3. 6.	0	−6.−3.−2.−1.1.2.3.6.	2 −3.
−1	21	1.3. 7.21.	1	−20.−6.−2.0.2.4 8.22.	4 −6.
−2	26	1.2.13.26.	4	−22.−9.2.3.5.6.17.30.	6.−9.

po successive pro $\mp C$, Differentias quæ oriuntur subducendo hos terminos de terminis superioribus o & o nempe -2 & $+3$, usurpo respective pro $\mp B$. Unitatem item pro A; & x pro l. Et sic pro $All \pm Bl \pm C$ habeo divisores duos tentandos $xx+2x-2$ & $xx-3x+3$, per quorum utrumque res succedit.

Rursus si proponatur quantitas $3y^5-6y^4+y^3-8yy-14y+14$, Operatio erit ut sequitur. Primo rem tento addendo & subducendo divisores quadratis terminorum progressionis 2, 1, 0, 1 usurpato 1 pro A, sed res non succedit. Quare pro A usurpo 3, alterum nempe

3	170		27		−7. 17
2	38	1.2.19.38.	12	−26.−7.10.11.13.14.31.50.	−7. 11
1	10	1.2. 5.10.	3	−7.−2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	−7. 5
0	14	1.2. 7.14.	0	−14.−7.−2.−1. 1.2.7.14.	−7.−1
−1	10	1.2. 5.10.	3	−7.−2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	−7.−7
−2	190		12		−7.−13

termini altissimi $3y^5$ divisorem numeralem, & quadratis istis multiplicatis per 3 hoc est numeris 12, 3, 0, 3 addo subducoque divisores; & progressiones in terminis resultantibus hasce duas invenio $-7, -7, -7, -7$ & $11.5.-1,-7$. Expeditionis gratia neglexeram divisores extimorum numerorum 170 & 190. Quare continuatis progressionibus sumo proximos earum hinc inde terminos, *viz.* -7 & 17 superius, & -7, & -13 inferius, ac tento si subductis his de numeris 27 ac 12 qui stant è regione in quarta columna differentiæ dividunt istos 170 & 190 qui stant è regione in columna secunda. Et quidem differentia inter 27 & -7 id est 34 dividit 170 & differentia 12 & -7 id est 19 dividit 190. Item differentia inter

27

27 & 17 id est 10 dividit 170 sed differentia inter 12 & -13 id est 25 non dividit 190. Quare posteriorem progressionem rejicio. Juxta priorem $\mp C$ est -7, & $\mp B$ nihil; terminis progressionis nullam habentibus differentiam. Quare divisor tentandus $All \pm Bl \pm C$, erit $3yy+7$. Et divisio succedit, prodeunte $y^3-2yy-2y+2$.

Si nullus inveniri potest hoc pacto divisor qui succedit, concludendum est quantitatem propositam non admittere divisorem duarum dimensionum. Posset eadem methodus extendi ad inventionem divisorum dimensionum plurium, quærendo in prædictis summis differentiisque progressiones non arithmeticas quidem sed alias quasdam quarum terminorum differentiæ primæ, secundæ, tertiæ, *&c.* sunt in arithmetica progressione: At in his Tyro non est detinendus.

Ubi in quantitate proposita duæ sunt literæ, & omnes ejus termini ad dimensiones æquè altas ascendunt; pro una istarum literarum pone unitatem, dein per regulas præcedentes quære divisorem, ac divisoris hujus comple deficientes dimensiones restituendo literam illam pro unitate.

Ut si quantitas sit $6y^4-cy^3-21ccyy+3c^3y+20c^4$ ubi termini omnes sunt quatuor dimensionum; pro c pono 1, quantitas evadit $6y^4-y^3-21yy+3y+20$, cujus divisor ut supra est $3y+4$, & completa deficiente dimensione posterioris termini per dimensionem c, fit $3y+4c$ divisor quæsitus. Ita si quantitas sit $x^4-bx^3-5bbxx+12b^3x-6b^4$; posito 1 pro b, & quantitatis resultantis $x^4-x^3-5xx+12x-6$ invento divisore $xx+2x-2$, compleo ejus deficientes dimensiones per dimensiones b, & sic habeo divisorem quæsitum $xx+2bx-2bb$.

Ubi in quantitate proposita tres vel plures sunt literæ, & ejus termini omnes ad easdem dimensiones ascendunt; potest divisor per præcedentes regulas inveniri; sed expeditius hoc modo: *Quære omnes divisores terminorum omnium in quibus literarum aliqua non est, item terminorum omnium in quibus alia aliqua literarum non est, pariter & omnium in quibus tertia litera quartaque & quinta non est si tot sunt literæ. Et sic percurre omnes literas. Et è regione literarum colloca divisores respectivè. Dein vide si in serie aliqua divisorum per omnes literas pergente, partes omnes unicam tantum literam involventes*

F *tot*

tot vicibus reperiantur quot sunt literæ una dempta in quantitate proposita: Et partes duas literas involventes tot vicibus quot sunt literæ demptis duabus in eadem quantitate. Si ita est; partes istæ omnes sub signis suis semel sumptæ erunt divisor quæsitus.

Ut si proponatur quantitas $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$; terminorum $8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$ in quibus non est x divisores unius dimensionis per præcedentes regulas inventi erunt $2b - 3c$ & $4b - 6c$; terminorum $12x^3 + 9cxx + 8ccx + 6c^3$ in quibus non est b, divisor unicus $4x + 3c$; ac terminorum $12x^3 - 14bxx - 12bbx + 8b^3$ in quibus non est c, divisores $2x - b$ & $4x - 2b$. Hos divisores è regione literarum x, b, c dispono ut hic vides.

x	$2b - 3c.\ 4b - 6c.$
b	$4x + 3c.$
c	$2x - b.\ 4x - 2b.$

Cum tres sint literæ & divisorum partes singulæ non nisi singulas literas involvant, in serie divisorum debent partes illæ bis reperiri. At divisorum $4b - 6c$ & $2x - b$ partes $4b, 6c, 2x, b$ non nisi semel occurrunt. Extra divisorem illum cujus sunt partes non reperiuntur. Quare divisores illos negligo. Restant tantum tres divisores $2b - 3c, 4x + 3c$ & $4x - 2b$. Hi in serie sunt per omnes literas x, b, c pergente, & eorum partes singulæ $2b, 3c, 4x$, bis reperiuntur in ipsis ut oportuit, idque cum signis iisdem, si modò signa divisoris $2b - 3c$ mutentur, & ejus loco scribatur $-2b + 3c$. Nam signa divisoris cujusvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b, 3c, 4x$ semel sub signis suis, & aggregatum $-2b + 3c + 4x$ divisor erit quem invenire oportuit. Nam si per hunc dividas quantitatem propositam prodibit $3xx - 2bx + 2cc - 4bb$.

Rursus si quantitas sit $12x^5 - 10ax^4 - 9bx^4 - 26aax^3 + 12abx^3 + 6bbx^3 + 24a^3xx - 8aabxx - 8abbxx - 24b^3xx - 4a^3bx + 6aabbx - 12ab^3x + 18b^4x + 12a^4b + 32aab^3 - 12b^5$; divisores terminorum in quibus x non est colloco è regione x; illos terminorum in quibus a non est, è regione a; & illos terminorum quibus b non est, è regione b, ut hic vides. Dein illos omnes qui sunt unius

b,

x | $b, 2b, 4b, aa+3bb, 2aa+6bb, 4aa+12bb, bb-3aa, 2bb-6aa, 4bb-12aa.$

a | $4xx-3bx+2bb, 12xx-9bx+6bb.$

b | $x, 2x, 3x-4a, 6x-8a, 3xx-4ax, 6xx-8ax, 2xx+ax-3aa, 4xx+2ax-6aa.$

dimensionis rejiciendos esse sentio, quia simplices $b, 2b, 4b, x, 2x$, & partes compositorum $3x-4a, 6x-8a$, non nisi semel in omnibus divisoribus reperiantur; tres autem sunt literæ in quantitate proposita, & partes illæ unicam tantum involvunt, atque adeo bis reperiri deberent. Similiter divisores duarum dimensionum $aa+3bb$, $2aa+6bb, 4aa+12bb, bb-3aa$ & $4bb-12aa$ rejicio, quia partes eorum $aa, 2aa, 4aa, bb$ & $4bb$ unicam tantum literam a vel b involventes non nisi semel reperiuntur. Divisoris autem $2bb-6aa$, qui solus restat è regione x, partes $2bb$ & $6aa$ quæ similiter unicam tantum literam involvunt, iterum reperiuntur, nempe pars $2bb$ in divisore $4xx-3bx+2bb$ & pars $6aa$ in divisore $4xx+2ax-6aa$. Quin etiam hi tres divisores in serie sunt, stantes è regione trium literarum x, a, b; & omnes eorum partes $2bb, 6aa, 4xx$ quæ unicam tantum literam involvunt bis reperiuntur in ipsis, idque sub propriis signis; partes vero $3bx, 2ax$ quæ duas literas involvunt non nisi semel occurrunt in ipsis. Quare horum trium divisorum partes omnes diversæ $2bb, 6aa, 4xx, 3bx, 2ax$ sub signis suis connexæ, divisorem desideratum $2bb-6aa+4xx-3bx+2ax$ conflabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propositam & oritur $3x^3-4axx-2aab-6b^3$.

Si quantitatis alicujus termini omnes non sunt æque alti, complendæ sunt dimensiones deficientes per dimensiones literæ cujusvis assumptæ, dein per præcedentes regulas invento divisore, litera assumpta delenda est. Ut si quantitas sit $12x^3-14bxx+9xx-12bbx-6bx+8x+8b^3-12bb-4b+6$; assume literam quamvis c, & per dimensiones ejus comple dimensiones quantitatis propositæ ad hunc modum $12x^3-14bxx+9cxx-12bbx-6bcx+8ccx+8b^3-12bbc-4bcc+6c^3$. Dein hujus divisore $4x-2b+3c$, invento

invento dele c; & habebitur divisor desideratus $4x - 2b + 3$.

Aliquando divisores facilius quam per has regulas inveniri possunt. Ut si litera aliqua in quantitate proposita sit unius tantum dimensionis; quærendus erit maximus communis divisor terminorum in quibus litera illa reperitur, & reliquorum terminorum in quibus non reperitur, nam divisor ille totam dividet. Et si nullus est ejusmodi communis divisor, nullus erit divisor totius. Exempli gratia, si proponatur quantitas $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c - 8a^4$; quæratur communis divisor terminorum $+cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$ in quibus c unius est tantum dimensionis, & terminorum reliquorum $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$ ac divisor ille nempe $xx + 2ax - 2aa$ dividet totam quantitatem.

Cæterum maximus duorum numerorum divisor communis, si prima fronte non innotescit, invenitur perpetua ablatione minoris de majori & reliqui de ablato. Nam quæsitus erit divisor qui tandem nihil relinquit. Sic ad inveniendum maximum communem divisorem numerorum 203 & 667, aufer ter 203 de 667, & reliquum 58 ter de 203, & reliquum 29 bis de 58, restabitque nihil: Quod indicat 29 esse divisorem quæsitum.

Haud secus in speciebus communis divisor; ubi compositus est, invenitur subducendo alterutram quantitatem, aut multiplicem ejus de altera: Si modò & quantitates illæ & residuum juxta literæ alicujus dimensiones ut Divisione ostensum est, ordinentur, & qualibet vice concinnentur dividendo ipsas per suos omnes divisores qui aut simplices sunt, aut singulos terminos instar simplicium dividunt. Sic ad inveniendum communem divisorem Numeratoris ac Denominatoris fractionis hujus $\frac{x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - axx - 8aax + 6a^3}$, multiplica Denominatorem per x ut primus ejus terminus evadat idem cum primo termino numeratoris. Dein aufer, & restabit $-2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$, quod concinnatum dividendo per $-2a$ evadit $x^3 - 6aax + 4a^3$. Hoc aufer de Denominatore & restabit $-axx - 2aax + 2a^3$. Quod itidem per $-a$ divisum fit $xx + 2ax - 2aa$. Hoc autem per x mul-

multiplica, ut ejus primus terminus evadat idem cum primo termino novissimi ablati $x^3-6aax+4a^3$, de quo auferendum est; & restabit $-2axx-4aax+4a^3$, quod per $-2a$ divisum fit etiam $xx+2ax-2aa$. Et hoc cum idem sit ac superius residuum, proindeque ablatum relinquat nihil, quæsitus erit divisor per quem fractio proposita, factâ Numeratoris ac Denominatoris divisione, reduci potest ad simpliciorem, nempe ad $\frac{xx-5ax+4aa}{x-3a}$.

Atque ita si habeatur fractio $\frac{6a^5+15a^4b-4a^3cc-10aabcc}{9a^3b-27aabc-6abcc+18bc^3}$, termini ejus imprimis abbreviandi sunt dividendo numeratorem per aa ac Denominatorem per $3b$. Dein ablato bis $3a^3-9aac-2acc+6c^3$ de $6a^3+15aab-4acc-10bcc$, restabit $\begin{matrix}15b\\+18c\end{matrix}aa\begin{matrix}-10bcc\\-12c^3\end{matrix}$. Quod concinnatum dividendo terminum utrumque per $5b+6c$ perinde ac si $5b+6c$ simplex esset quantitas, evadit $3aa-2cc$. Hoc multiplicatum per a aufer de $3a^3-9aac-2acc+6c^3$ & secunda vice restabit $-9aac+6c^3$ quod itidem concinnatum per applicationem ad $-3c$, evadit etiam $3aa-2cc$ ut ante. Quare $3aa-2cc$ quæsitus est divisor. Quo invento, divide per eum partes fractionis propositæ & obtinebitur $\frac{2a^3+5aab}{3ab-9bc}$.

Quod si divisor communis hoc pacto non inveniatur, certum est nullum omninò existere, nisi forsan è terminis prodeat per quos Numerator ac Denominator fractionis abbreviantur. Ut si habeatur fractio $\frac{aadd-ccdd-aacc+c^4}{4aad-4acd-2acc+2c^3}$, ac termini ejus juxta dimensiones literæ d disponantur ita ut Numerator evadat $\begin{matrix}aa\\-cc\end{matrix}dd\begin{matrix}-aacc\\+c^4\end{matrix}$ ac Denominator $\begin{matrix}4aa\\-4ac\end{matrix}d\begin{matrix}-2acc\\+2c^3\end{matrix}$. Hos imprimis oportet abbreviare dividendo utrumque Numeratoris terminum per $aa-cc$ & utrumque Denominatoris per $2a-2c$ perinde ac si $aa-cc$ & $2a-2c$ essent simplices quantitates. Atque ita vice Numeratoris emerget

$dd-cc$, & vice Denominatoris $2ad-cc$, ex quibus sic præparatis nullis communis divisor obtineri potest. Sed è terminis $aa-cc$ & $2a-2c$ per quos Numerator ac Denominator abbreviati sunt, prodit ejusmodi divisor, nempe $a-c$, cujus ope fractio ad hanc $\frac{add+cdd-acc-c^3}{4ad-2cc}$ reduci potest. Quod si neque termini $aa-cc$ & $2a-2c$ communem divisorem habuissent, fractio proposita fuisset irreducibilis.

Et hæc generalis est methodus inveniendi communes divisores: *Sed plerumque expeditius inveniuntur quærendo omnes alterutrius quantitatis divisores primos, hoc est, qui per alios dividi nequeunt, ac dein tentando siqui alteram divident absque residuo.* Sic ad reducendum $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{aa-ab}$ ad minimos terminos, invenendi sunt divisores quantitatis $aa-ab$ nempe a & $a-b$. Dein tentandum est an alterutr a vel $a-b$ dividet etiam $a^3-aab+abb-b$ absque residuo.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM *ad communem Denominatorem.*

Fractiones ad communem Denominatorem reducuntur multiplicando terminos utriusque per denominatorem alterius.

Sic habitis $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, duc terminos unius $\frac{a}{b}$ in d, & vicissim terminos alterius $\frac{c}{d}$ in b, & evadent $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, quarum communis est denominator bd. Atquè ita a & $\frac{ab}{c}$ sive $\frac{a}{1}$ & $\frac{ab}{c}$ evadunt $\frac{ac}{c}$ & $\frac{ab}{c}$. Ubi verò Denominatores communem habent divisorem, sufficit multiplicare alternè per Quotientes. Sic fractiones $\frac{a^3}{bc}$ & $\frac{a^3}{bd}$ ad hasce $\frac{a^3d}{bcd}$ & $\frac{a^3c}{bcd}$ reducuntur, multiplicando alternè per Quo-

Quotientes c ac d ortos divisione denominatorum per communem divisorem b.

Hæc autem reductio præcipuè usui est in Additione & Subductione fractionum, quæ si diversos habent denominatores, ad eundem reducendæ sunt antequam uniri possunt. Sic $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ per reductionem evadit $\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$, sive $\frac{ad+bc}{bd}$. Et $a+\frac{ab}{c}$ evadit $\frac{ac+ab}{c}$. Et $\frac{a^3}{bc}-\frac{a^3}{bd}$ evadit $\frac{a^3d-a^3c}{bcd}$ vel $\frac{d-c}{bcd}a^3$. Et $\frac{c^4+x^4}{cc-xx}-cc-xx$ evadit $\frac{2x^4}{cc-xx}$. Atque ita $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$ evadit $\frac{14}{21}+\frac{15}{21}$ sive $\frac{14+15}{21}$ hoc est $\frac{29}{21}$. Et $\frac{11}{6}-\frac{3}{4}$ evadit $\frac{22}{12}-\frac{9}{12}$ sive $\frac{13}{12}$. Et $\frac{3}{4}-\frac{5}{12}$ evadit $\frac{9}{12}-\frac{5}{12}$ sive $\frac{4}{12}$ hoc est $\frac{1}{3}$. Et $3\frac{4}{7}$ sive $\frac{3}{1}+\frac{4}{7}$ evadit $\frac{21}{7}+\frac{4}{7}$ sive $\frac{25}{7}$. Et $25\frac{1}{2}$ evadit $\frac{51}{2}$.

Fractiones ubi plures sunt gradatim uniri debent. Sic habito $\frac{aa}{x}-a+\frac{2xx}{3a}-\frac{ax}{a-x}$; ab $\frac{aa}{x}$ aufer a & restabit $\frac{aa-ax}{x}$, huic adde $\frac{2xx}{3a}$ & prodibit $\frac{3a^3-3aax+2x^3}{3ax}$ unde aufer denique $\frac{ax}{a-x}$ & restabit $\frac{3a^4-6a^3x+2ax^3-2x^4}{3aax-3axx}$. Atque ita si habeatur $3\frac{4}{7}-\frac{2}{3}$, imprimis aggregatum $3\frac{4}{7}$ inveniendum est nempe $\frac{25}{7}$ dein ab hoc auferendum $\frac{2}{3}$ & restabit $\frac{61}{21}$.

DE REDUCTIONE RADICALIUM
ad minimos terminos.

R*adicalis ubi totius radix extrahi nequit, plerumque concinnatur extrahendo radicem divisoris alicujus.*

Sic $\sqrt{aabc}$ extrahendo radicem divisoris aa fit $a\sqrt{bc}$. Et $\sqrt{48}$ extrahendo radicem divisoris 16 fit $4\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48aabc}$ extrahen-

do

do radicem divisoris $16aa$ fit $4a\sqrt{3bc}$. Et $\sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{aa - 4ab + 4bb}{cc}$ fit $\frac{a - 2b}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{aamm}{ppzz}$ fit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo + 4mp}$. Et $6\sqrt{\frac{75}{98}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{25}{49}$ fit $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, sive $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}$ radicemque denominatoris adhuc extrahendo, fit $\frac{15}{7}\sqrt{6}$. Et sic $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ sive $a\sqrt{\frac{ab}{aa}}$ extrahendo radicem denominatoris fit $\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3}:\overline{8a^3b + 16a^4}$ extrahendo radicem cubicam divisoris $8a^3$ fit $2a\sqrt{3}:\overline{b + 2a}$. Haud secus $\sqrt{4}\,a^3x$ extrahendo radicem quadraticam divisoris aa fit $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4}\,ax$ vel extrahendo radicem quadrato-quadraticam divisoris a^4 fit $a\sqrt{4}\,\frac{x}{a}$. Atque ita $\sqrt{6}:a^7x^5$ convertitur in $a\sqrt{6}:ax^5$, vel in $ax\sqrt{6}:\frac{a}{x}$ vel in $\sqrt{ax} \times \sqrt{3}:aax$.

Cæterùm hæc reductio non tantùm concinnandis radicalibus inservit, sed & earum Additioni & Subductioni, si modò ex parte radicali conveniant ubi ad formam simplicissimam reducuntur. Tunc enim uniri possunt, quod aliter non fit. Sic $\sqrt{48} + \sqrt{75}$ per reductionem evadit $4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ hoc est $9\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48} - \sqrt{\frac{16}{27}}$ per reductionem evadit $4\sqrt{3} - \frac{4}{9}\sqrt{3}$ hoc est $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. Et sic $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}} + \sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}}$ extrahendo quicquid est rationale, evadit $\frac{2b}{c}\sqrt{ab} + \frac{a - 2b}{c}\sqrt{ab}$ hoc est $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3}:\overline{8a^3b + 16a^4} - \sqrt{3}:\overline{b^4 + 2ab^3}$ evadit $2a\sqrt{3}:\overline{b + 2a} - b\sqrt{3}:\overline{b + 2a}$ hoc est $\overline{2a - b}\sqrt{3}:\overline{b + 2a}$.

DE

DE REDUCTIONE RADICALIUM
ad eandem denominationem.

Cum in radicalibus diversæ denominationis instituenda est multiplicatio vel divisio, oportet omnes ad eandem denominationem reducere, idque præfigendo signum radicale cujus index est minimus numerus quem earum indices dividunt absque residuo, & suffixas quantitates toties dempta una vice in se ducendo quoties index ille jam major evaserit.

Sic enim $\sqrt{ax}$ in $\sqrt{3:aax}$ evadit $\sqrt{6:a^3x^3}$ in $\sqrt{6:a^4xx}$ hoc est $\sqrt{6:a^7x^5}$. Et $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4:ax}$ evadit $\sqrt{4:aa}$ in $\sqrt{4:ax}$ hoc est $\sqrt{4:a^3x}$. Et $\sqrt{6}$ in $\sqrt{4:\frac{5}{6}}$ evadit $\sqrt{4:36}$ in $\sqrt{4:\frac{5}{6}}$ hoc est $\sqrt{4:30}$. Eadem ratione $a\sqrt{bc}$ evadit $\sqrt{aa}$ in $\sqrt{bc}$ hoc est $\sqrt{aabc}$. Et $4a\sqrt{3bc}$ evadit $\sqrt{16aa}$ in $\sqrt{3bc}$ hoc est $\sqrt{48aabc}$. Et $2a\sqrt{3:\overline{b+2a}}$ evadit $\sqrt{3:8a^3}$ in $\sqrt{3:\overline{b+2a}}$ hoc est $\sqrt{3:\overline{8a^3b+16a^4}}$. Atque ita $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ fit $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bb}}$ sive $\sqrt{\frac{ac}{bb}}$. Et $\frac{6abb}{\sqrt{18ab^3}}$ fit $\frac{\sqrt{36aab^4}}{\sqrt{18ab^3}}$ sive $\sqrt{2ab}$. Et sic in aliis.

DE REDUCTIONE RADICALIUM
ad simpliciores radicales per extractionem radicum.

Radices quantitatum quæ ex integris & radicalibus quadraticis componuntur sic extrahe.

Designet A *quantitatis alicujus partem majorem*, B *partem minorem: Et erit* $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum majoris partis radicis*; *&* $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum partis minoris*, *quæ quidem majori adnectenda est cum signo ipsius* B.

Ut si quantitas sit $3+\sqrt{8}$, scribendo 3 pro A, & $\sqrt{8}$ pro B,

 erit

erit $\sqrt{AA-BB}=1$, indeque quadratum majoris partis radicis $\frac{3+1}{2}$ id est 2, & quadratum minoris partis $\frac{3-1}{2}$ id est 1. Ergo radix est $1+\sqrt{2}$. Rursus si ex $\sqrt{32}-\sqrt{24}$ radix extrahenda sit, ponendo $\sqrt{32}$ pro A & $\sqrt{24}$ pro B erit $\sqrt{AA-BB}=\sqrt{8}$, & inde $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{8}}{2}$ & $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2}$ hoc est $3\sqrt{2}$ & $\sqrt{2}$ quadrata partium radicis. Radix itaque est $\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$. Eodem modo si de $aa+2x\sqrt{aa-xx}$ radix extrahi debet, pro A scribe aa, & pro B $2x\sqrt{aa-xx}$ & erit $AA-BB = a^4-4aaxx+4x^4$. Cujus radix est $aa-2xx$. Unde quadratum unius partis radicis erit $aa-xx$, illud alterius xx; adeoque radix $x+\sqrt{aa-xx}$. Rursus si habeatur $aa+5ax-2a\sqrt{ax+4xx}$, scribendo $aa+5ax$ pro A & $2a\sqrt{ax+4xx}$ pro B, fiet $AA-BB=a^4+6a^3x+9aaxx$ cujus radix est $aa+3ax$. Unde quadratum majoris partis radicis erit $aa+4ax$, illud minoris ax, & radix $\sqrt{aa+4ax}-\sqrt{ax}$. Denique si habeatur $6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$, ponendo $6+\sqrt{8}=A$ & $-\sqrt{12}-\sqrt{24}=B$ fiet $AA-BB=8$. Unde radicis pars major $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ hoc est (ut supra) $1+\sqrt{2}$, & pars minor $\sqrt{3}$, atque adeo radix ipsa $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Cæterum ubi plures sunt hujusmodi termini radicales, possunt partes radicis citius inveniri dividendo factum quarumvis duarum radicalium per tertiam aliquam radicalem quæ producit quotum rationalem & integrum. Nam dupli Quoti istius radix erit duplum partis radicis quæsitæ. Ut in exemplo novissimo $\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{12}}{\sqrt{24}}=2$, $\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{24}}{\sqrt{12}}=4$, $\frac{\sqrt{12}\times\sqrt{24}}{\sqrt{8}}=6$. Ergo partes radicis sunt 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ut supra.

Est & regula extrahendi altiores radices ex quantitatibus numeralibus duarum potentia commensurabilium partium.

Sit quantitas $A\pm B$. *Ejus pars major* A. *Index radicis extrahendæ c. Quære minimum numerum n, cujus potestas* n^c *dividitur per* $AA-BB$ *sine residuo, & sit quotus* Q. *Computa* $\sqrt[c]{\overline{A+B}\times\sqrt{Q}}$

in

in numeris integris proximis. Sit illud r. Divide $A\sqrt{Q}$ *per maximum divisorem rationalem: Sit quotus s, sitque* $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ *in numeris integris proximis t. Et erit* $\frac{ts \pm \sqrt{ttss-n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ *radix quæsita, si modo radix extrahi potest.*

Ut si radix cubica extrahenda sit ex $\sqrt{968}+25$; erit $AA-BB=343$; ejus divisores 7, 7, 7; ergo $n=7$ & $Q=1$. Porro $\overline{A+B}\sqrt{Q}$ seu $\sqrt{968}+25$ extracta prioris partis radice fit paulo major quam 56; ejus radix cubica in numeris proximis est 4. Ergo $r=4$. Insuper $A\sqrt{Q}$ seu $\sqrt{968}$ extrahendo quicquid rationale est fit $22\sqrt{2}$. Ergo $\sqrt{2}$ ejus pars radicalis est s, & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ seu $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ in numeris integris proximis est 2. Ergo $t=2$. Denique ts est $2\sqrt{2}$, $\sqrt{ttss-n}$ est 1 & $\sqrt[2c]{Q}$ seu $\sqrt[6]{1}$ est 1. Ergo $2\sqrt{2}+1$ est radix quæsita si modo radix extrahi queat. Tento itaque per multiplicationem si cubus ipsius $2\sqrt{2}+1$ sit $\sqrt{968}+25$ & res succedit.

Rursus si radix cubica extrahenda sit ex $68-\sqrt{4374}$; erit $AA-BB=250$, Cujus divisores sunt 5, 5, 5, 2. Ergo $n=5\times2=10$, & $Q=4$. Et $\sqrt[c]{\overline{A+B}\times\sqrt{Q}}$ seu $\sqrt[3]{\overline{68+\sqrt{4374}}\times 2}$ in numeris proximis integris est $7=r$. Insuper $A\sqrt{Q}$ seu $68\sqrt{4}$ extrahendo quicquid rationale est fit $136\sqrt{1}$. Ergo $s=1$, & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ seu $\frac{7+\frac{10}{7}}{2}$ in numeris integris proximis est $4=t$: Ergo $ts=4$, $\sqrt{ttss-n}=\sqrt{6}$ & $\sqrt[2c]{Q}=\sqrt[6]{4}$ seu $\sqrt[3]{2}$ atque adeo radix tentanda $\frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Iterum si radix quadrato-cubica extrahenda sit ex $29\sqrt{6}+41\sqrt{3}$; erit

erit $AA - BB = 3$, adeoque $n = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$, $ts = \sqrt{6}$, $\sqrt{ttss - n} = \sqrt{3}$ & $\sqrt[20]{Q} = \sqrt[10]{81}$ seu $\sqrt[5]{9}$ atque adeo radix tentanda $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

Cæterum in hujusmodi operationibus si quantitas fractio sit vel partes ejus communem habent divisorem; radices denominatoris & factorum seorsim extrahe. Ut si ex $\sqrt{242} - 12\frac{1}{2}$ radix cubica extrahenda sit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\dfrac{\sqrt{968} - 25}{2}$. Dein extracta seorsim numeratoris ac denominatoris radice cubica orietur $\dfrac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt[3]{2}}$. Rursus si ex $\sqrt[3]{3993} + \sqrt[6]{17578125}$ radix aliqua extrahenda sit; divide partes per communem divisorem $\sqrt[3]{3}$, & emerget $11 + \sqrt{125}$. Unde quantitas proposita valet $\sqrt[3]{3}$ in $11 + \sqrt{125}$, cujus radix invenietur extrahendo seorsim radicem factoris utriusque $\sqrt[3]{3}$ & $11 + \sqrt{125}$.

DE FORMA ÆQUATIONIS.

Æquationes, quæ sunt quantitatum aut sibi mutuo æqualium, aut simul nihilo æquipollentium congeries, duobus præcipuè modis considerandæ veniunt; vel ut ultimæ conclusiones ad quas in Problematis solvendis deventum est, vel ut media quorum ope finales æquationes acquirendæ sunt. Prioris generis æquatio ex unica tantum incognita quantitate cognitis involuta conflatur, modò Problema sit definitum & aliquid certi quærendum innuat. Sed eæ posterioris generis involvunt plures quantitates incognitas quæ ideo debent inter se comparari & ita connecti ut ex omnibus una tandem emergat æquatio nova cui insit unica quam quærimus incognita quantitas admista cognitis. Quæ quantitas ut exinde facilius eliciatur, æquatio ista variis plerumque modis transformanda est, donec evadat

dat ea simplicissima quæ potest, atque etiam similis alicui ex sequentibus earum gradibus, in quibus x designat quantitatem quæsitam ad cujus dimensiones termini, ut vides, ordinantur, & p, q, r, s alias quascunque quantitates ex quibus determinatis & cognitis etiam x determinatur, & per methodos explicandas investigari potest.

$x = p.$	$x - p \quad = 0.$
$xx = px \; + q.$	Vel $xx - px \; - q = 0$
$x^3 = pxx + qx \; + r.$	$x^3 - pxx - qx \quad - r = 0.$
$x^4 = px^3 + qxx + rx + s.$	$x^4 - px^3 - qxx - rx - s = 0.$
&c.	&c.

Ad horum normam itaque termini æquationum secundum dimensiones incognitæ quantitatis in ordinem semper redigendi sunt, ita ut primum locum occupent in quibus incognita quantitas est plurimarum dimensionum, instar x, xx, x^3, x^4, & secundum locum in quibus ea est una dimensione minor, instar p, px, pxx, px^3, & sic præterea. Et quod signa terminorum attinet, possunt ea omnibus modis se habere: Imò & unus vel plures ex intermediis terminis aliquando deesse. Sic $x^3 * - bbx + b^3 = 0$ vel $x^3 = bbx - b^3$, est æquatio tertii gradus, $z^4 \begin{smallmatrix} +a \\ -b \end{smallmatrix} z^3 * \begin{smallmatrix} +ab^3 \\ -b^4 \end{smallmatrix} = 0$ æquatio quarti. Nam gradus æquationum æstimantur ex maxima dimensione quantitatis incognitæ, nullo respectu ad quantitates cognitas habito, nec ad intermedios terminos. Attamen ex defectu intermediorum terminorum æquatio plerumque fit multò simplicior, & nonnunquam ad gradum inferiorem quodammodo deprimitur. Sic enim $x^4 = qxx + s$ æquatio secundi gradus censenda est, siquidem ea in duas secundi gradus æquationes resolvi potest. Nam supposito $xx = y$, & y pro xx in æquatione illa perinde scripto, ejus vice prodibit $yy = qy + s$, æquatio secundi gradus; cujus ope cum y inventa fuerit, æquatio $xx \quad y$ secundi etiam gradus, dabit x.

Atque hæ sunt conclusiones ad quas Problemata deduci debent. Sed antequam eorum resolutionem aggrediar, opus erit ut modos transformandi & in ordinem redigendi æquationes, & ex mediis eliciendi finales æquationes abstractè doceam. Æquationis autem solitariæ reductionem in sequentibus regulis complectar.

G 3 De

De concinnanda Æquatione solitaria.

Reg. I. *Siquæ sunt quantitates quæ se mutuo destruere, vel per Additionem aut Subductionem coalescere possunt, termini perinde minuendi sunt.*

Veluti si habeatur $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$ aufer utrinque $2x$ & adde $3a$ proditque $5b = 8a + x$. Atque ita $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$, delendo æquipollentes $\frac{2ab}{a} - b = b$, evadit $\frac{bx}{a} = a$.

Ad hanc Regulam referri debet etiam ordinatio terminorum æquationis quæ fieri solet per translationem ad contrarias partes cum signo contrario. Ut si habita æquatione $5b = 8a + x$ desideretur x; aufer utrinque $8a$, vel, quod eodem recidit, transfer $8a$ ad contrarias partes cum signo mutato, & prodibit $5b - 8a = x$. Eodem modo si habeatur $aa - 3ay = ab - bb + by$ ac desideretur y, transpone $-3ay$ & $ab - bb$, eo ut ex una parte consistant termini multiplicati per y, & ex altera reliqui termini, & prodibit $aa - ab + bb = 3ay + by$, unde y elicietur per Reg. 5. sequentem, dividendo scilicet utramque partem per $3a + b$, prodibit enim $\frac{aa - ab + bb}{3a + b} = y$. Atque ita æquatio $abx + a^3 - aax = abb - 2abx - x^3$ per debitam transpositionem & ordinationem evadit $x^3 = \begin{matrix} aa \\ -3ab \end{matrix} x \begin{matrix} -a^3 \\ +abb \end{matrix}$ vel $x^3 \begin{matrix} -aa \\ +3ab \end{matrix} x \begin{matrix} +a^3 \\ -abb \end{matrix} = 0$.

Reg. II. *Siqua compareat quantitas per quam omnes æquationis termini multiplicantur, debent omnes per illam quantitatem dividi; vel si per eandem quantitatem omnes dividantur debent omnes per illam multiplicari.*

Sic habito $15bb = 24ab + 3bx$, divide terminos omnes per b & fit $15b = 24a + 3x$. Deinde per 3 & fit $5b = 8a + x$. Vel habito $\frac{b^3}{ac} - \frac{bbx}{cc} = \frac{xx}{c}$ multiplica omnes per c & prodit $\frac{b^3}{a} - \frac{bbx}{c} = xx$.

Reg.

REG. III. *Siqua sit fractio irreducibilis in cujus denominatore reperiatur litera illa ad cujus dimensiones æquatio ordinanda est, omnes æquationis termini per istum denominatorem, aut per aliquem divisorem ejus multiplicandi sunt.*

Ut si æquatio $\frac{ax}{a-x}+b=x$ secundum x ordinanda sit, multiplicentur omnes ejus termini per $a-x$ denominatorem fractionis $\frac{ax}{a-x}$ siquidem x inibi reperiatur, & prodit $ax+ab-bx=ax-xx$, seu $ab-bx=-xx$, & facta utriusque partis translatione $xx=bx-ab$. Atque ita si habeatur $\frac{a^3-abb}{2cy-cc}=y-c$ terminique juxta y ordinandi sint multiplicentur per denominatorem $2cy-cc$ vel saltem per divisorem $2y-c$ quo y tollatur è denominatore & exurget $\frac{a^3-abb}{c}=2yy-3cy+cc$ & ordinando $\frac{a^3-abb}{c}-cc+3cy=2yy$. Ad eundem modum $\frac{aa}{x}-a=x$ multiplicando per x evadit $aa-ax=xx$, & $\frac{aabb}{cxx}=\frac{xx}{a+b-x}$ multiplicando primo per xx, dein per $a+b-x$ evadit $\frac{a^3bb+aab^3-aabbx}{c}=x^4$.

REG. IV. *Sicui surdæ quantitati irreducibili litera illa involvatur ad cujus dimensiones æquatio ordinanda est, cæteri omnes termini ad contrarias partes cum signis mutatis transferendi sunt, & utraque pars æquationis in se* semel *multiplicanda si radix* quadratica *sit, vel* bis *si sit* cubica, *&c.*

Sic ad ordinandum juxta x æquationem $\sqrt{aa-ax}+a=x$, transferatur a ad alteras partes, fitque $\sqrt{aa-ax}=x-a$; & quadratis partibus, $aa-ax=xx-2ax+aa$, seu $0=xx-ax$ hoc est $x=a$. Sic etiam $\sqrt[3]{aax+2axx-x^3}-a+x=0$, transponendo $-a+x$ evadit $\sqrt[3]{aax+2axx-x^3}=a-x$, & partibus cubicè multiplicatis $aax+2axx-x^3=a^3-3aax+3axx-x^3$, seu $xx=4ax-aa$. Et sic $y=\sqrt{ay+yy-a\sqrt{ay-yy}}$ quadratis partibus evadit

dit $yy = ay + yy - a\sqrt{ay - yy}$ & terminis debitè transpositis $ay = a\sqrt{ay - yy}$ seu $y = \sqrt{ay - yy}$, & partibus iterum quadratis $yy = ay - yy$, & transponendo denuo, $2yy = ay$ sive $2y = a$.

Reg. V. *Terminis secundum Dimensiones literæ alicujus ope præcedentium regularum dispositis, si maxima ejusdem literæ dimensio per cognitam quamlibet quantitatem multiplicetur, debet tota æquatio per eandem dividi.*

Sic $2y = a$ dividendo per 2 evadit $y = \frac{1}{2}a$. Et $\frac{bx}{a} = a$ dividendo per $\frac{b}{a}$ evadat $x = \frac{aa}{b}$. Et $\begin{smallmatrix} 2ac \\ -cc \end{smallmatrix} x^3 \begin{smallmatrix} +a^3 \\ +aac \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} -2a^3c \\ +aacc \end{smallmatrix} x - a^3cc = 0$ dividendo per $2ac - cc$ evadit $x^3 + \frac{\begin{smallmatrix} a^3 \\ aac \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} -2a^3c \\ +aacc \end{smallmatrix} x - a^3cc}{2ac - cc} = 0$, sive $x^3 + \frac{a^3 + aac}{2ac - cc} xx - aax - \frac{a^3c}{2a - c} = 0$.

Reg. VI. *Aliquando reductio institui potest dividendo æquationem per compositam aliquam quantitatem.*

Sic enim $y^3 = \begin{smallmatrix} -2c \\ +b \end{smallmatrix} yy + 3bcy - bbc$, ad hanc $yy = -2cy + bc$ reducitur transferendo terminos omnes ad easdem partes hoc modo, $y^3 \begin{smallmatrix} +2c \\ -b \end{smallmatrix} yy - 3bcy + bbc = 0$, & dividendo per $y - b$ ut in capite de divisione ostensum est: Prodibit enim $yy + 2cy - bc = 0$. Ast hujusmodi divisorum inventio difficilis est & eam prius docuimus.

Reg. VII. *Aliquando etiam reductio per extractionem radicis ex utraque æquationis parte instituitur.*

Quemadmodum si habeatur $xx = \frac{1}{4}aa - bb$, extracta utrobique radice prodit $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Quod si habeatur $xx + aa = 2ax + bb$ transfer $2ax$ & exurget $xx - 2ax + aa = bb$, extractisque partium radicibus $x - a = +$ vel $-b$, seu $x = a \pm b$. Sic etiam habito $xx = ax - bb$, adde utrinque $-ax + \frac{1}{4}aa$ & prodit $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$,

$-bb$, & extracta utrobique radice $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ seu $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et sic universaliter: Si sit $xx = \cdot px \cdot q$, erit $x = \cdot \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp \cdot q}$. Ubi $\frac{1}{2}p$ & q iisdem signis ac p & q in æquatione priori afficienda sunt; sed $\frac{1}{4}pp$ semper affirmativè ponendum. Estque hoc exemplum Regula ad cujus similitudinem æquationes omnes quadraticæ ad formam simplicium reduci possunt. E g. Proposita æquatione $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$, ad extrahendam radicem y confer $\frac{2xx}{a}$ cum p, & xx cum q, hoc est scribe $\frac{xx}{a}$ pro $\frac{1}{2}p$ & $\frac{x^4}{aa} + xx$ pro $\frac{1}{4}pp$ q, atque orietur $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$ vel $y = \frac{xx}{a} - \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. Eodem modo æquatio $yy = ay - 2cy + aa - cc$ conferendo $a - 2c$ cum p, & $aa - cc$ cum q, dabit $y = \frac{1}{2}a - c + \sqrt{\frac{5}{4}aa - ac}$. Quin etiam æquatio quadrato-quadratica $x^4 = -aaxx + ab^3$ cujus termini impares desunt, ope hujus regulæ evadit $xx = -\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^3}$, & extracta iterum radice $x = \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^3}}$. Et sic in aliis.

Suntque hæ regulæ pro concinnanda æquatione solitaria, quarum usum cum Analysta satis perspexerit, ita ut æquationem quamcunque propositam secundum quamlibet literarum in ea complexarum disponere noverit, & ejusdem literæ si ea unius sit dimensionis, aut maximæ potestatis ejus si plurium, valorem elicere: Haud difficilem sentiet comparationem plurium æquationum inter se; quam pergo jam docere.

De duabus pluribusve æquationibus in unam transformandis ut incognitæ quantitates exterminentur.

Cum in alicujus problematis solutionem plures habentur æquationes statum quæstionis comprehendentes, quarum unicuique plu-

 res

res etiam incognitæ quantitates involvuntur; æquationes istæ (duæ per vices si modo sint plures duabus) sunt ita connectendæ ut una ex incognitis quantitatibus per singulas operationes tollatur, & emergat æquatio nova. Sic habitis æquationibus $2x=y+5$, & $x=y+2$, demendo æqualia ex æqualibus prodibit $x=3$. Et sciendum est quod per quamlibet æquationem una quantitas incognita potest tolli, atque adeo cum tot sunt æquationes quot quantitates incognitæ, omnes possunt ad unam denique reduci in qua unica manebit quantitas incognita. Sin quantitates incognitæ sint unâ plures quàm æquationes habentur tum in æquatione ultimò resultante duæ manebunt quantitates incognitæ, & si sint duabus plures quàm æquationes habentur tum in æquatione ultimò resultante manebunt tres, & sic præterea.

Possunt etiam duæ vel plures quantitates incognitæ per duas tantum æquationes fortasse tolli. Ut si sit $ax-by=ab-az$, & $bx+by=bb+az$: Tum æqualibus ad æqualia additis prodibit $ax+bx=ab+bb$, exterminatis utrisque y & z. Sed ejusmodi casus vel arguunt vitium aliquod in statu quæstionis latere, vel calculum erroneum esse aut non satis artificiosum. Modus autem quo una quantitas incognita per singulas æquationes tollatur ex sequentibus patebit.

Exterminatio quantitatis incognitæ per æqualitatem valorum ejus.

Cum quantitas tollenda unius est tantum dimensionis in utraque æquatione, valor ejus uterque per regulas jam ante traditas quærendus est, & alter valor statuendus æqualis alteri.

Sic positis $a+x=b+y$ & $2x+y=3b$, ut exterminetur y æquatio prima dabit $a+x-b=y$, & secunda dabit $3b-2x=y$. Est ergo $a+x-b=3b-2x$, sive ordinando $x=\frac{4b-a}{3}$.

Atque ita $2x=y$, & $5+x=y$ dant $2x=5+x$ seu $x=5$.

Et

Et $ax-2by=ab$, & $xy=bb$ dant $\frac{ax-ab}{2b}(=y)=\frac{bb}{x}$; five ordinando $xx-bx-\frac{2b^3}{a}=0$.

Item $\frac{bbx-aby}{a}=ab+xy$, & $bx+\frac{ayy}{c}=2aa$ tollendo x dant $\frac{aby+aab}{bb-ay}(=x)=\frac{2aac-ayy}{bc}$: Et reducendo $y^3-\frac{bb}{a}yy-\frac{2aac-bbc}{a}y+bbc=0$.

Denique $x+y-z=0$ & $ay=xz$ tollendo z dant $x+y(=z)=\frac{ay}{x}$ five $xx+xy=ay$.

Hoc idem quoque perficitur fubducendo alterutrum valorem quantitatis incognitæ ab altero, & ponendo refiduum æquale nihilo. Sic in exemplorum primo tolle $3b-2x$ ab $a+x-b$ & manebit $a+3x-4b=0$, five $x=\frac{4b-a}{3}$.

Exterminatio quantitatis incognitæ fubftituendo pro ea valorem fuum.

Cum in altera faltem æquatione, tollenda quantitas unius tantum dimenfionis exiftit, valor ejus in ea quærendus eft; & pro fe in æquationem alteram fubftituendus. Sic propofitis $xyy=b^3$ & $xx+yy=by-ax$; ut exterminetur x, prima dabit $\frac{b^3}{yy}=x$: Quare in fecundam fubftituo $\frac{b^3}{yy}$ pro x, & prodit $\frac{b^6}{y^4}+yy=by-\frac{ab^3}{yy}$, ac reducendo $y^6-by^5+ab^3yy+b^6=0$.

Propofitis autem $ayy+aay=z^3$; & $yz-ay=az$, ut y tollatur, fecunda dabit $y=\frac{az}{z-a}$. Quare pro y fubftituo $\frac{az}{z-a}$ in pri-

primam, proditque $\frac{a^3zz}{zz-2az+aa}+\frac{a^3z}{z-a}=z^3$. Et reducendo, $z^4-2az^3+aazz-2a^3z+a^4=0$.

Pari modo propositis $\frac{xy}{c}=z$ & $cy+zx=cc$, ad z tollendum pro eo substituo $\frac{xy}{c}$ in æquationem secundam, & prodit $cy+\frac{xxy}{c}=cc$.

Cæterum qui in hujusmodi computationibus exercitatus fuerit sæpenumero contractiores modos percipiet quibus incognita quantitas exterminari possit. Sic habitis $ax=\frac{bbx-b^3}{z}$ & $x=\frac{az}{x-b}$, si æqualia multiplicentur æqualibus, prodibunt æqualia $axx=abb$ sive $x=b$. Sed casus ejusmodi particulares studiosis proprio marte cum res tulerit investigandos linquo.

Exterminatio quantitatis incognitæ quæ plurium in utraque æquatione dimensionum existit.

Cum in neutra æquatione tollenda quantitas unius tantum dimensionis existit valor maximæ potestatis ejus in utraque quærendus est; Deinde si potestates istæ non sint eædem, æquatio potestatis minoris multiplicanda est per tollendam quantitatem aut per ejus quadratum aut cubum, &c. ut ea evadat ejusdem potestatis cum æquatione altera. Tum valores illarum potestatum ponendæ sunt æquales, & æquatio nova prodibit ubi maxima potestas sive dimensio tollendæ quantitatis diminuitur. Et hanc operationem iterando quantitas illa tandem auferetur.

Quemadmodum sit $xx+5x=3yy$ & $2xy-3xx=4$; ut x tollatur, prima dabit $xx=-5x+3yy$ & secunda $xx=\frac{2xy-4}{3}$. Pono itaque $3yy-5x=\frac{2xy-4}{3}$, & sic x ad unicam tantum dimensionem reducitur, adeoque tolli potest per ea quæ paulo ante ostendi.

di. Scilicet æquationem noviſſimam debite reducendo prodit $9yy - 15x = 2xy - 4$, ſive $x = \frac{9yy+4}{2y+15}$. Hunc itaque valorem pro x in aliquam ex æquationibus primo propoſitis (velut in $xx + 5x = 3yy$) ſubſtituo, & oritur $\frac{81y^4+72yy+16}{4yy+60y+225} + \frac{45yy+20}{2y+15} = 3yy$. Quam, ut in ordinem redigatur, multiplico per $4yy+60y+225$, & prodit $81y^4+72yy+16+90y^3+40y+675yy+300 = 12y^4+180y^3+675yy$, ſive $69y^4 - 90y^3 + 72yy + 40y + 316 = 0$.

Præterea ſi ſit $y^3 = xyy + 3x$, & $yy = xx - xy - 3$; ut y tollatur multiplico poſteriorem æquationem per y & fit $y^3 = xxy - xyy - 3y$ totidem dimenſionum quot prior. Jam ponendo valores ipſius y^3 ſibimet æquales habeo $xyy + 3x = xxy - xyy - 3y$, ubi y deprimitur ad duas dimenſiones. Per hanc itaque & ſimpliciorem ex æquationibus primo propoſitis $yy = xx - xy - 3$ quantitas y prorſus tolli poteſt inſiſtendo veſtigiis prioris exempli.

Sunt & alii modi quibus hæc eadem abſolvi poſſunt; idque ſæpenumero contractius. Quemadmodum ex $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$ & $yy = 2xy + \frac{x^4}{aa}$; ut y deleatur, extrahe in utraque radicem y ſicut in Reg. 7. oſtenſum eſt, & prodibunt $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & $y = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. Jam hos ipſius y valores ponendo æquales habebitur $\frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx} = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & rejiciendo æqualia $\sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, reſtabit $\frac{xx}{a} = x$, vel $xx = ax$ & $x = a$.

Porro ut ex æquationibus $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$ tollatur x, aufer y de partibus æquationis primæ, & reſtat $x + \frac{yy}{x} = 20 - y$, & partibus quadratis fit $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y + yy$

tollendoque utrinque yy restat $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=400-40y$. Quare cum $400-40y$ & 140 iisdem quantitatibus æquentur, erit $400-40y=140$, sive $y=6\frac{1}{2}$. Et sic opus in plerisque aliis æquationibus contrahere liceat.

Cæterum cum quantitas exterminanda multarum dimensionum existit, ad eam ex æquationibus tollendam calculus maxime laboriosus nonnunquam requiritur: Sed labor tunc plurimum minuetur per exempla sequentia tanquam regulas adhibita.

Reg. I.

Ex $axx+bx+c=0$, & $fxx+gx+h=0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah-bg-2cf}\times ah:+\overline{bh-cg}\times bf:+\overline{agg+cff}\times c=0.$$

Reg. II.

Ex $ax^3+bxx+cx+d=0$, & $fxx+gx+h=0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah-bg-2cf}\times ahh:+\overline{bh-cg-2df}\times bfh:+\overline{ch-dg}\times\overline{agg+cff}:$$
$$+\overline{3agh+bgg+dff}\times df=0.$$

Reg. III.

Ex $ax^4+bx^3+cxx+dx+e=0$, & $fxx+gx+h=0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah-bg-2cf}\times ah^3:+\overline{bh-cg-2df}\times bfhh:+\overline{agg+cff}$$
$$\times\overline{chh-dgh+egg-2efh}:+\overline{3agh+bgg+dff}\ dfh:$$
$$+\overline{2ahh+3bgh-dfg+eff}\times eff:-\overline{bg-2ah}$$
$$\times efgg=0.$$

Reg.

Reg. IV.

Ex $ax^3+bxx+cx+d=0$, & $fx^3+gxx+hx+k=0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah-bg-2cf}\times\overline{adhh-achk}:+\overline{ak+bh-cg-2df}\times bdfh:$$
$$-\overline{ak+bh+2cg+3df}\times aakk:+\overline{cdh-ddg-cck+2bdk}$$
$$\times\overline{agg+cff}:+3\overline{agh+bgg+dff-3afk}\times ddf:-\overline{3ak-bh+cg+df}$$
$$\times bcfk:+\overline{bk-2dg}\times bbfk-\overline{bhk-3adh-cdf}\times agk=0.$$

Verbi gratia, ut ex æquationibus $xx+5x-3yy=0$, & $3xx-2xy+4=0$ exterminetur x: in regulam primam pro $a, b, c; f, g,$ & h respective substituo $1, 5, -3yy; 3, -2y,$ & 4. Et signis $+$ & $-$ probe observatis oritur $\overline{4+10y+18yy}\times 4:+\overline{20-6y^3}\times 15:+\overline{4yy-27yy}\times -3yy=0$. Sive $16+40y+72yy+300-90y^3+69y^4=0$.

Simili ratione ut y deleatur ex æquationibus $y^3-xyy-3x=0$ & $yy+xy-xx+3=0$, in regulam secundam pro $a, b, c, d; f, g, h,$ & k substituo, $1, -x, 0, -3x; 1, x, -xx+3,$ & y, respective, proditque $\overline{3-xx+xx}\times\overline{9-6xx+x^4}:-\overline{3x+x^3+6x}\times\overline{-3x+x^3}:+3xx\times xx:+\overline{9x-3x^3-x^3-3x}\times -3x=0$. Tum delendo superflua & multiplicando, fit $27-18xx+3x^4, -9xx+x^6, +3x^4-18x^2+12x^4=0$. Et ordinando $x^6+18x^4-45xx+27=0$.

Hactenus de unica incognita quantitate è duabus æquationibus tollenda. Quod si plures è pluribus tollendæ sunt, opus per gradus peragetur: Ex æquationibus $ax=yz$, $x+y=z$ & $5x=y+3z$, si quantitas y elicienda sit, imprimis tolle alteram quantitatum x aut z, puta x substituendo pro eâ valorem ejus $\frac{yz}{a}$ (per æquationem primam inventum) in æquationem secundam ac tertiam. Quo pacto obtinebuntur $\frac{yz}{a}+y=z$, & $\frac{5yz}{a}=y+3z$: E quibus deinde tolle z ut supra.

De

De modo tollendi quantitates quotcunque surdas ex æquationibus.

Huc referre licet quantitatum surdarum exterminationem fingendo eas literis quibuslibet æquales. Quemadmodum si sit $\sqrt{ay} - \sqrt{aa-ay} = 2a + \sqrt[3]{ayy}$, scribendo t, pro $\sqrt{ay}$, v pro $\sqrt{aa-ay}$, & x pro $\sqrt[3]{ayy}$ habebuntur æquationes $t - v = 2a + x$, $tt = ay$, $vv = aa - ay$, & $x^3 = ayy$, ex quibus tollendo gradatim t, v, & x resultabit tandem æquatio libera ab omni Asymmetria.

Quomodo Quæstio aliqua ad æquationem redigatur.

Postquam Tyro in æquationibus pro arbitrio transformandis & concinnandis aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit ut ingenii vires in quæstionibus ad æquationem redigendis tentet. Proposita autem aliqua Quæstione, Artificis ingenium in eo præsertim requiritur ut omnes ejus conditiones totidem æquationibus designet. Ad quod faciendum perpendet imprimis an propositiones sive sententiæ quibus enunciatur sint omnes aptæ quæ terminis algebraicis designari possint, haud secus quam conceptus nostri characteribus græcis vel latinis. Et si ita, (ut solet in quæstionibus quæ circa numeros vel abstractas quantitates versantur,) tunc nomina quantitatibus ignotis, atque etiam notis, si opus fuerit, imponat; & sensum quæstionis sermone, ut ita loquar, analytico designet. Et conditiones ejus ad algebraicos terminos sic translatæ tot dabunt æquationes, quot ei solvendæ sufficiunt.

Quemadmodum si quærantur tres numeri continue proportionales quorum summa sit 20, & quadratorum summa 140; positis x, y & z nominibus numerorum trium quæsitorum, Quæstio è latinis literis in algebraicas vertetur ut sequitur.

Quæ-

Quæstio Latine enunciata.	Eadem algebraice.
Quæruntur tres numeri his conditionibus,	$x . y . z$?
Ut sint continue proportionales,	$x . y :: y . z$. sive $xz = yy$
Ut omnium summa sit 20.	$x + y + z = 20$.
Et ut quadratorum summa sit 140.	$xx + yy + zz = 140$.

Atque ita quæstio deducitur ad æquationes $xz = yy$, $x + y + z = 20$ & $xx + yy + zz = 140$, quarum ope x, y & z per regulas supra traditas investigandi sunt.

Cæterum notandum est solutiones quæstionum eo magis expeditas & artificiosas ut plurimum evadere quo pauciores incognitæ quantitates sub initio ponuntur. Sic in hac quæstione posito x pro primo numero & y pro secundo, erit $\frac{yy}{x}$ tertius continue proportionalis; quem proinde ponens pro tertio numero quæstionem ad æquationes sic reduco.

Quæstio Latine enunciata.	Eadem Algebraice.
Quæruntur tres numeri continue proportionales,	$x . y . \frac{yy}{x}$?
Quorum summa sit 20,	$x + y + \frac{yy}{x} = 20$.
Et quadratorum summa 140.	$xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$.

Habentur itaque æquationes $x + y + \frac{yy}{x} = 20$ & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$ quarum reductione x & y determinandi sunt.

Aliud exemplum accipe. Mercator quidam nummos ejus triente quotanis adauget, demptis 100 ℔ quas annuatim impendit in familiam, & post tres annos fit duplo ditior. Quæruntur nummi.

Ad hoc autem resolvendum sciendum est quod plures latent propositiones quæ omnes sic eruuntur & enunciantur.

Latine.	Algebraice.
Mercator habet nummos quoſdam.	x.
Ex quibus anno primo expendit 100 ℔.	$x - 100$.
Et reliquum adauget triente.	$x - 100 + \frac{x - 100}{3}$ ſive $\frac{4x - 400}{3}$.
Annoque ſecundo expendit 100 ℔.	$\frac{4x - 400}{3} - 100$ ſive $\frac{4x - 700}{3}$.
Et reliquum adauget triente.	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$ ſive $\frac{16x - 2800}{9}$.
Et ſic anno tertio expendit 100 ℔.	$\frac{16x - 2800}{9} - 100$ ſive $\frac{16x - 3700}{9}$.
Et reliquo trientem ſimiliter lucratus eſt.	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 2700}{27}$ ſive $\frac{64x - 14800}{27}$.
Fitque duplo ditior quam ſub initio.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$.

Quæſtio itaque ad æquationem $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$ redigitur; cujus reductione eruendus eſt x. Nempe duc eam in 27 & fit $64x - 14800 = 54x$ ſubduc $54x$ & reſtat $10x - 14800 = 0$, ſeu $10x = 14800$, & dividendo per 10 fit $x = 1480$. Quare 1480 ℔ ſunt nummi ſub initio ut & lucrum.

Vides itaque quod ad ſolutiones quæſtionum quæ circa numeros vel abſtractas quantitatum relationes ſolummodo verſantur, nihil aliud fere requiritur quam ut è ſermone Latino vel alio quovis in quo Problema proponitur, tranſlatio fiat in ſermonem (ſi ita loquar) Algebraicum, hoc eſt in Characteres qui apti ſunt ut noſtros de quantitatum relationibus conceptus deſignent. Nonnunquam vero poteſt accidere quod ſermo quocum ſtatus quæſtionis exprimitur ineptus videatur qui in Algebraicum poſſit verti; ſed paucis mutationibus adhibitis,

hibitis, & ad sensum potius quam verborum sonos attendendo versio reddetur facilis. Sic enim quælibet apud Gentes loquendi formæ propria habent Idiomata: Quæ ubi obvenerint, translatio ex unis in alias non verbo tenus instituenda est sed ex sensu determinanda. Cæterum ut hujusmodi problemata hac methodo ad æquationes redigendi familiaritatem convincam & illustrem, & cum Artes exemplis facilius quam præceptis addiscantur, placuit sequentium problematum solutiones adjungere:

PROB. I.

Data duorum numerorum summa a & differentia quadratorum b, invenire numeros?

Sit eorum minor x & erit alter $a-x$ eorumque quadrata xx & $aa-2ax+xx$: Quorum differentia $aa-2ax$ supponitur b. Est itaque $aa-2ax=b$, indeque per reductionem $aa-b=2ax$ seu $\frac{aa-b}{2a}\left(=\frac{1}{2}a-\frac{b}{2a}\right)=x$.

Exempli Gr. Si summa numerorum seu a sit 8, & quadratorum differentia seu b 16; erit $\frac{1}{2}a-\frac{b}{2a}(=4-1)=3=x$ & $a-x=5$. Quare numeri sunt 3 & 5.

PROB. II.

Invenire tres quantitates x, y & z quarum paris cujusque summa datur.

Si summa paris x & y sit a; paris x & z, b; ac paris y & z, c: Pro determinandis tribus quæsitis x, y & z tres habebuntur æquationes $x+y=a$, $x+z=b$, & $y+z=c$. Jam ut incognitarum duæ puta y & z exterminentur, aufer x utrinque in prima & secunda æquatione, & emergent $y=a-x$, & $z=b-x$, quos valores pro y & z substitue in tertia, & orietur $a-x+b-x=c$ & per reductionem $x=\frac{a+b-c}{2}$. Invento x æquationes superiores $y=a-x$ & $z=b-x$ dabunt y & z.

Exempl. Si summa paris x & y sit 9, paris x & z 10, & paris y & z 13; tum in valoribus x, y & z scribe 9 pro a, 10 pro b, & 13 pro c; & evadet $a+b-c=6$, adeoque $x\ (=\frac{a+b-c}{2}) = 3$, $y\ (=a-x)$ $=6$, & $z\ (=b-x) = 7$.

PROB. III.

Quantitatem datam ita in partes quotcunque dividere ut majores partes superent minimam per datas differentias.

Sit a quantitas in quatuor ejusmodi partes dividenda, ejusque prima atque minima pars x, & super hanc excessus secundæ partis b, tertiæ partis c & quartæ partis d; & erit $x+b$ secunda pars, $x+c$ tertia pars & $x+d$ quarta pars, quarum omnium aggregatum $4x+b+c+d$ æquatur toti lineæ a. Aufer jam utrinque $b+c+d$ & restat $4x=a-b-c-d$ sive $x=\frac{a-b-c-d}{4}$.

Exempl. Proponatur linea 20 pedum sic in 4 partes distribuenda ut super primam partem excessus secundæ sit 2 pedum tertiæ 3 ped. & quartæ 7 ped. Et quatuor partes erunt $x\ (=\frac{a-b-c-d}{4}$ sive $\frac{20-2-3-7}{4}) = 2$, $x+b=4$, $x+c=5$, & $x+d=9$.

Eodem modo quantitas in plures partes iisdem conditionibus dividitur.

PROB. IV.

Viro cuidam nummos inter mendicantes distribuere volenti, desunt octo denarii quo minus det singulis tres denarios. Dat itaque singulis duos denarios & tres denarii supersunt. Quæritur numerus mendicantium.

Esto numerus mendicantium x & deerunt 8 denarii quo minus det omnibus $3x$ denarios; habet itaque $3x-8$ denarios. Ex his autem dat $2x$ denarios, & reliqui denarii $x-8$ sunt tres. Hoc est $x-8=3$ seu $x=11$.

PROB.

PROB. V.

Si Tabellarii duo A & B, 59 milliaribus distantes, tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 mill. in 3 horis, ac B una hora serius iter instituit quam A: Quæritur longitudo itineris quod A conficiet antequam conveniet B.

Dic longitudinem illam x; & erit $59 - x \cdot$ longitudo itineris B: Et cum A pertranseat 7 mill. in 2 hor. pertransibit spatium x in $\frac{2x}{7}$ horis, eo quod sit 7 mill. 2 hor. :: x mill. $\frac{2x}{7}$ hor. Atque ita cum B pertranseat 8 mill. in 3 hor. pertransibit spatium suum $59 - x$ in $\frac{177 - 3x}{8}$ horis. Jam cum horum temporum differentia sit 1 hora; ut evadant æqualia adde differentiam illam breviori tempori nempe tempori $\frac{177 - 3x}{8}$, & emerget $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$. Et per reductionem $35 = x$. Nam multiplicando per 8 fit $185 - 3x = \frac{16x}{7}$. Dein multiplicando etiam per 7 fit $1295 - 21x = 16x$, seu $1295 = 37x$. Et dividendo denique per 37, exoritur $35 = x$. Sunt itaque 35 mill. iter quod A conficiet antequam conveniet B.

Idem generalius.

Datis duorum mobilium A & B eodem cursu pergentium celeritatibus, una cum intervallo locorum ac temporum à quibus incipiunt moveri: Determinare metam in qua convenient.

Pone mobilis A eam esse celeritatem qua spatium c pertransire possit in tempore f, & mobilis B eam esse qua spatium d pertransire possit in tempore g; & locorum intervallum esse e, ac h temporum in quibus moveri incipiunt.

CASUS I.

Deinde si ambo ad easdem plagas tendant, & A sit mobile quod sub initio motus longius distat a meta: Pone distantiam illam esse x, indeque aufer intervallum e, & restabit $x-e$ pro distantia B a meta. Et cum A pertranseat spatium c in tempore f, tempus in quo pertransibit spatium x erit $\frac{fx}{c}$, eo quod sit spatium c ad tempus f, ut spatium x ad tempus $\frac{fx}{c}$. Atque ita cum B pertranseat spatium d in g, tempus in quo pertransibit spatium $x-e$ erit $\frac{gx-ge}{d}$. Jam cum horum temporum differentia supponatur b, ut ea evadant aequalia adde b breviori tempori, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ si modo B prius incipiat moveri, & evadet $\frac{fx}{c}+b=\frac{gx-ge}{d}$. Et per reductionem $\frac{cge+cdb}{cg-df}$ vel $\frac{ge+db}{g-\frac{d}{c}f}=x$. Sin A prius moveri incipiat adde b tempori $\frac{gx-ge}{d}$ & evadet $\frac{fx}{c}=b+\frac{gx-ge}{d}$, & per reductionem $\frac{cge-cdb}{cg-df}=x$.

CASUS II.

Quod si mobilia obviam eant, & x ut ante ponatur initialis distantia mobilis A a meta, tum $e-x$ erit initialis distantia ipsius B ab eadem meta; & $\frac{fx}{c}$ tempus in quo A conficiet distantiam x, atque $\frac{ge-gx}{d}$ tempus in quo B conficiet distantiam suam $e-x$. Quorum temporum minori, ut supra, adde differentiam b; nempe tempori $\frac{fx}{c}$ si B prius incipiat moveri, & sic habebitur

tur $\frac{fx}{c}+b=\frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge-cdb}{cg+df}=x$. Sin A prius incipiat moveri, adde b tempori $\frac{ge-gx}{d}$ & evadet $\frac{fx}{c}=b+\frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge+cdb}{cg+df}=x$.

Exempl. I. Si quotidie Sol unum gradum conficit & Luna tredecim, & ad tempus aliquod, Sol ſit in principio Cancri atque poſt tres dies Luna in principio Arietis: Quæritur locus conjunctionis proxime futuræ. Reſp. in $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri. Nam cum ambo ad eaſdem plagas eant, & ſerior ſit Epocha motus lunæ quæ longius diſtat a meta: Erit A Luna, B Sol, & $\frac{cge+cdb}{cg-df}$ longitudo itineris lunaris, quæ, ſi ſcribatur 13 pro c; 1 pro f, d, ac g; 90 pro e; & 3 pro b; evadet $\frac{13\times1\times90+13\times1\times3}{13\times1-1\times1}$; hoc eſt $\frac{1209}{12}$, ſive $100\frac{3}{4}$. Hos itaque gradus adjice pincipio Arietis & prodibit $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri.

Exempl. II. Si Tabellarii duo A & B, 59 milliaribus diſtantes, tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 milliaria in 3 horis, & B una hora ſerius iter inſtituit quam A: Quæritur iter quod A conficiet antequam conveniat B. Reſp. 35 mill. Nam cum obviam eant & A primo inſtituat iter, erit $\frac{cge+cdb}{cg+df}$ iter quæſitum. Et hoc, ſcribatur 7 pro c, 2 pro f, 8 pro d, 3 pro g, 59 pro e, & 1 pro b, evadet $\frac{7\times3\times59+7\times8\times1}{7\times3+8\times2}$; hoc eſt $\frac{1295}{37}$ ſive 35.

PROB. VI.

Data agentis alicujus poteſtate, invenire quot ejuſmodi agentes datum effectum a in dato tempore b producent.

Sit ea agentis poteſtas qua effectum c producere poteſt in tempore

pore d, & erit ut tempus d ad tempus b, ita effectus c quem agens iste producere potest in tempore d, ad effectum quem potest producere in tempore b, qui proinde erit $\frac{bc}{d}$. Deinde ut unius agentis effectus $\frac{bc}{d}$ ad omnium effectum a, ita agens iste unicus ad omnes agentes: Adeoque agentium numerus erit $\frac{ad}{bc}$.

Exempl. Si scriba in 8 diebus 15 folia describere potest, quot ejusmodi scribæ requiruntur ad describendum 405 folia in 9 diebus? Resp. 24. Nam si substituantur 8 pro d, 15 pro c, 405 pro a & 9 pro b, numerus $\frac{ad}{bc}$ evadet $\frac{405 \times 8}{9 \times 15}$ hoc est $\frac{3240}{135}$, sive 24.

PROB. VII.

Datis plurium agentium viribus, tempus x determinare in quo datum effectum d conjunctim producent.

Agentium A, B, C, vires ponantur quæ in temporibus e, f, g producant effectus a, b, c respective; & hæ in tempore x producent effectus $\frac{ax}{e}, \frac{bx}{f}, \frac{cx}{g}$. Quare est $\frac{ax}{e}+\frac{bx}{f}+\frac{cx}{g}=d$, & per reductionem $x=\frac{d}{\frac{a}{e}+\frac{b}{f}+\frac{c}{g}}$.

Exempl. Tres mercenarii opus aliquod certis temporibus perficere possunt, *viz*. A semel in tribus septimanis, B ter in octo septimanis, & C quinquies in duodecim septimanis. Quæritur quanto tempore simul absolvent? Sunt itaque Agentium A, B, C vires quæ temporibus 3, 8, 12 producant effectus 1, 3, 5 respective: Et quæritur tempus quo absolvent effectum 1. Quare pro $a, b, c; d; e, f, g$ scribe 1, 3, 5, 1, 3, 8, 12, & proveniet $x=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}}$ sive $\frac{8}{9}$ sept. hoc est 6 dies $5\frac{1}{3}$ horæ, tempus quo simul absolvent.

PROB.

PROB. VIII.

Dissimiles duarum pluriumve rerum misturas ita componere ut res illæ commistæ datam inter se rationem acquirant.

Sit unius misturæ data quantitas $dA+eB+fC$, alterius eadem quantitas $gA+hB+kC$, & eadem tertiæ $lA+mB+nC$ ubi A, B, & C denotent res mistas, & $d, e, f, g, h,$ &c. Proportiones earundem in misturis. Et sit $pA+qB+rC$ mistura quam ex his tribus oportet componere; fingeque x, y & z numeros esse per quos si tres datæ misturæ respective multiplicentur, earum summa evadet $pA+qB+rC$. Est itaque
$$\left.\begin{array}{l} dxA+exB+fxC \\ +gyA+hyB+kyC \\ +lzA+mzB+nzC \end{array}\right\} = pA+qB+rC,$$
Adeoque collatis terminis $dx+gy+lz=p$, $ex+hy+mz=q$, & $fx+ky+nz=r$, & per reductionem $x=\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{q-hy-mz}{e}=\frac{r-ky-nz}{f}$. Et rursus æquationes $\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{q-hy-mz}{e}$ & $\frac{q-hy-mz}{e}=\frac{r-ky-nz}{f}$ per reductionem dant $\frac{ep-dq+dmz-elz}{eg-dh}$ $(=y)$ $=\frac{fq-er+enz-fmz}{fh-ek}$: Quæ, si abbrevietur scribendo α pro $ep-dq$, β pro $dm-el$, γ pro $eg-dh$, δ pro $fq-er$, ζ pro $en-fm$, & θ pro $fh-ek$, evadet $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=\frac{\delta+\zeta z}{\theta}$, & per reductionem $\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=z$. Invento z pone $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=y$ & $\frac{p-gy-lz}{d}=x$.

Exempl. Si tres sint metallorum colliquefactorum misturæ, quarum primæ pondo continet argenti ℥ 12, æris ℥ 1, & stanni ℥ 3, secundæ pondo continet argenti ℥ 1, æris ℥ 12, & stanni ℥ 3, & tertiæ pondo continet æris ℥ 14, stanni ℥ 2, & argenti nihil; sintque hæ misturæ ita componendæ ut pondo compositionis contineat argenti ℥ 4 æris ℥ 9 & stanni ℥ 3: Pro $d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r$ scribe 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3 respective, & erit α $(=ep-dq=1\times4$

 -12

$-12\times9)=-104$, & $\beta\ (=dm-el=12\times14-1\times0)=168$, & sic $\gamma=-143$, $\delta=24$, $\zeta=-40$, & $\theta=33$. Adeoque $z\ (=\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=\frac{-3432+3432}{5720-5544})=0$, $y\ (=\frac{\alpha+3z}{\gamma}=\frac{-104+0}{-143})=\frac{8}{11}$, & $x\ (=\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{4-\frac{8}{11}}{12})=\frac{3}{11}$. Quare si misceantur $\frac{8}{11}$ partes pondo misturæ secundæ, $\frac{3}{11}$ partes pondo primæ & nihil tertiæ aggregatum erit pondo continens quatuor uncias argenti, novem æris, & tres stanni.

PROB. IX.

Datis plurium ex iisdem rebus misturarum pretiis, & proportionibus mistorum inter se, pretium cujusvis è mistis determinare.

Cujusvis rerum A, B, C, misturæ $dA+gB+lC$ pretium esto p, misturæ $eA+hB+mC$ pretium q, & misturæ $fA+kB+nC$ pretium r; & rerum illarum A, B, C quærantur pretia x, y & z. Utpote pro rebus A, B, & C substitue earum pretia x, y & z, & exsurgent æquationes $dx+gy+lz=p$, $ex+hy+mz=q$, & $fx+ky+nz=r$, ex quibus pergendo ut in præcedente Problemate, elicientur itidem $\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=z$, $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=y$, & $\frac{p-gy-lz}{d}=x$.

Exempl. Emit quidam 40 modios tritici, 24 modios hordei, & 20 modios avenæ simul 15 libris 12 solidis: Deinde consimilis grani emit 26 modios tritici, 30 modios hordei, & 50 modios avenæ simul 16 libris: Ac tertio consimilis etiam grani emit 24 modios tritici, 120 modios hordei & 100 modios avenæ simul 34 lib. Quæritur quanti æstimandus sit modius cujusque grani? Resp. Modius tritici 5 solidis, hordei 3 solidis & avenæ 2 solidis. Nam pro d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, & r scribendo respective 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, & 34; prodit $\alpha\ (=ep-dq=26\times15\frac{3}{5}-40\times16)=-234\frac{2}{5}$; & $\beta\ (=dm-el=40\times50-26\times20)=1480$. Atque ita $\gamma=-576$, $\delta=-500$, $\zeta=1400$, & $\theta=-2400$. Adeoque

$z\ (=$

$z\left(=\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=\frac{562560-288000}{-806400+3552000}=\frac{274560}{2745600}\right)=\frac{1}{10},\ y\left(=\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=\frac{-234\frac{1}{3}+148}{-576}\right)=\frac{3}{20}.$ Et $x\left(=\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{15\frac{1}{3}-\frac{10}{3}-2}{40}\right)=\frac{1}{4}.$ Constitit itaque modius tritici $\frac{1}{4}$ ℔ seu 5 solidis, modius hordei $\frac{3}{20}$ ℔ seu 3 solidis, & modius avenæ $\frac{1}{10}$ ℔ seu 2 solidis.

PROB. X.

Datis & misturæ & mistorum gravitatibus specificis invenire proportionem mistorum inter se.

Sit e gravitas specifica misturæ $A+B$ cujus A gravitas specifica est a, & B gravitas b: & cum gravitas absoluta seu pondus componatur ex mole corporis & gravitate specifica, erit aA pondus ipsius A, bB pondus ipsius B, & $eA+eB$ pondus aggregati $A+B$, adeoque $aA+bB=eA+eB$, indeque $aA-eA=eB-bB$ seu $e-b.a-e::A.B$.

Exempl. Sit auri gravitas ut 19, argenti ut $10\frac{1}{3}$, & Coronæ Hieronis ut 17; eritque $10.3\ (::e-b.\ a-e::A.B)::$ moles in auri corona, ad molem argenti, vel $190.31\ (::19\times10.10\frac{1}{3}\times3::a\times\overline{e-b}.\ b\times\overline{a-e})::$ pondus auri in corona, ad pondus argenti, & $221.31::$ pondus coronæ, ad pondus argenti.

PROB. XI.

Si boves a depascant pratum b in tempore c; & boves d depascant pratum æque bonum e in tempore f, & gramen uniformiter crescat: Quæritur quot boves depascent pratum simile g in tempore h.

Si boves a in tempore c depascant pratum b; tum per analogiam boves $\frac{e}{b}a$ in eodem tempore c, vel boves $\frac{ec}{bf}a$ in tempore f, vel boves $\frac{ec}{bh}a$ in tempore h, depascent pratum e: puta si gramen post tempus c non cresceret. Sed cùm propter graminis incrementum boves d in tempore f, depascant solummodo pratum e, ideo gra-

minis in prato e incrementum illud per tempus $f-c$ tantum erit quantum per se sufficit pascendis bobus $d-\frac{eca}{bf}$ per tempus f, hoc est quantum sufficit pascendis bobus $\frac{df}{b}-\frac{eca}{bb}$ per tempus b. Et in tempore $b-c$ per analogiam tantum erit incrementum quantum per se sufficit pascendis bobus $\frac{b-c}{f-c}$ in $\frac{df}{b}-\frac{eca}{bb}$ sive $\frac{bdfb-ecab-bdcf+aecc}{bfb-bcb}$. Hoc incrementum adjice bobus $\frac{aec}{bb}$ & prodibit $\frac{bdfb-ecab-bdcf+ecfa}{bfb-bcb}$ numerus boum quibus pascendis sufficit pratum e per tempus b. Adeoque per analogiam pratum g bobus $\frac{bdfgb-ecagb-bdcgf+ecfga}{befb-bceb}$ per idem tempus b pascendis sufficiet.

Exempl. Si 12 boves depascant $3\frac{1}{3}$ jugera prati in 4 septimanis; & 21 boves depascant 10 jugera consimilis prati in 9 septimanis; quæritur quot boves depascant 24 jugera in 18 septimanis? Resp. 36. Ille enim numerus invenietur substituendo in $\frac{bdfgb-ecagb-bdcgf+ecfga}{befb-bceb}$ numeros 12, $3\frac{1}{3}$, 4, 21, 10, 9, 24, & 18 pro literis a, b, c, d, e, f, g & b respective. Sed solutio forte haud minus expedita erit si è primis principiis ad formam solutionis præcedentis literalis eruatur. Utpote si 12 boves in 4 septimanis depascant $3\frac{1}{3}$ jugera, tum per analogiam 36 boves in 4 septimanis vel 16 boves in 9 septimanis vel 8 boves in 18 septimanis depascent 10 jugera: Puta si gramen non cresceret. Sed cum propter graminis incrementum 21 boves in 9 septimanis depascant solummodo 10 jugera, illud graminis in 10 jugeris per posteriores 5 septimanas incrementum tantum erit quantum per se sufficit excessui boum 21 supra 16, hoc est 5 bobus per 9 septimanas, vel quod perinde est $\frac{5}{2}$ bobus per 18 septimanas pascendis. Et in 14 septimanis (excessu 18 supra 4 primas) incrementum illud graminis per analogiam tantum erit

erit quantum sufficiat 7 bobus per 18 septimanas pascendis; est enim 5 sept. 14 sept. ∷ boves 7 boves. Quare 8 bobus quos 10 jugera sine incremento graminis pascere possunt per 18 septimanas adde hosce 7 boves quibus pascendis solum incrementum graminis sufficit, & summa erit 15 boves. Ac denique si 10 jugera 15 bobus per 18 septimanas pascendis sufficiant, tum per analogiam 24 jugera per idem tempus sufficient 36 bobus.

PROB. XII.

Datis sphæricorum corporum in eadem recta motorum, sibique occurrentium magnitudinibus & motibus, determinare motus eorundem post reflexionem.

Hujus resolutio ex his dependet conditionibus, ut corpus utrumque tantum reactione patiatur quantum agit in alterum, & ut eadem celeritate post reflexionem recedant ab invicem qua ante accedebant. His positis sint corporum A & B celeritates a & b respective; & motus (siquidem componantur ex mole & celeritate corporum) erunt aA & bB. Et si corpora ad easdem plagas tendant, & A celerius movens insequatur B, pone x decrementum motus aA, & incrementum motus bB percussione exortum; & post reflexionem motus erunt $aA-x$ & $bB+x$; & celeritates $\frac{aA-x}{A}$ ac $\frac{bB+x}{B}$ quarum differentia æquatur $a-b$ differentiæ celeritatum ante reflexionem. Habetur itaque æquatio $\frac{bB+x}{B}-\frac{aA-x}{A}=a-b$, & inde per reductionem fit $x=\frac{2aAB-2bAB}{A+B}$, quo pro x in celeritatibus $\frac{aA-x}{A}$ & $\frac{bB+x}{B}$ substituto prodeunt $\frac{aA-aB+2bB}{A+B}$ celeritas ipsius A, & $\frac{2aA-bA+bB}{A+B}$ celeritas ipsius B post reflexionem.

Quod si corpora obviam eant, tum signo ipsius b ubique mutato, celeritates post reflexionem erunt $\frac{aA-aB-2bB}{A+B}$

 &

& $\frac{2aA+bA-bB}{A+B}$: Quarum alterutra si forte negativa obvenerit, id arguit motum illum post reflexionem ad plagam dirigi ei contrariam ad quam A tendebat ante reflexionem. Id quod etiam de motu ipsius A in casu priori intelligendum est.

Exempl. Si corpora homogenea A trium librarum cum celeritatis gradibus 8, & B novem librarum cum celeritatis gradibus 2 ad easdem plagas tendant: tunc pro A, a, B & b scribe 3, 8, 9 & 2; & $\left(\frac{aA-aB+2bB}{A+B}\right)$ evadit -1, ac $\left(\frac{2aA-bA+bB}{A+B}\right)$ 5. Recedet itaque A cum uno gradu celeritatis post reflexionem, & B cum quinque gradibus progredietur.

PROB. XIII.

Invenire tres numeros continue proportionales quorum summa sit 20, *& quadratorum summa* 140.

Pone numerorum primum x, & secundum y; eritque tertius $\frac{yy}{x}$, adeoque $x+y+\frac{yy}{x}=20$; & $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140$. Et per reductionem $xx\,{}^{+y}_{-20}\,x+yy=0$, & $x^4\,{}^{+yy}_{-140}\,xx+y^4=0$. Jam ut exterminetur x, pro a, b, c, d, e, f, g & h in Reg. 3. substitue respective $1, 0, yy-140, 0, y^4; 1, y-20$, & yy; Et emerget $\overline{-yy+280}\times y^6 : +2\,\overline{yy-40y+260}\times\overline{260y^4-40y^5} : +3y^4\times y^4 : -2yy\times\overline{y^6-40y^5+400y^4} : =0$. Et per multiplicationem $1600y^6-20800y^5-67600y^4=0$. Ac reducendo $4yy-52y+169=0$. Sive (radice extracta) $2y-13=0$ seu $y=6\frac{1}{2}$, Id quod etiam brevius alia methodo sed minus obvia supra inventum est. Porro ut inveniatur x substitue $6\frac{1}{2}$ pro y in æquatione $xx\,{}^{+y}_{-20}\,x+yy=0$. Et exsurget $xx-13\frac{1}{2}x+42\frac{1}{4}=0$, seu $xx=13\frac{1}{2}x+42\frac{1}{4}$. Et extracta radice $x=6\frac{3}{4}+$ vel $-\sqrt{3\frac{5}{16}}$. Nempe $6\frac{3}{4}+\sqrt{3\frac{5}{16}}$ est maximus quæsitorum trium numerorum, & $6\frac{3}{4}-\sqrt{3\frac{5}{16}}$ minimus. Nam x alterutrum extremorum numerorum ambigue designat, indeque gemini prodeunt valores, quorum alteruter potest esse

esse x, existente altero $\frac{yy}{x}$.

Idem aliter. Positis numeris x, y & $\frac{yy}{x}$ ut ante, erit $x + y + \frac{yy}{x} = 20$; seu $xx = \begin{matrix}20\\-y\end{matrix}x - yy$ & extracta radice $x = 10 - \frac{1}{2}y + \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}yy}$ primus numerus: Hunc & y aufer de 20 & restat $\frac{yy}{x} = 10 - \frac{1}{2}y - \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}yy}$ tertius numerus. Estque summa quadratorum à tribus hisce numeris $400 - 40y$, adeoque $400 - 40y = 140$, sive $y = 6\frac{1}{2}$. Invento medio numero $6\frac{1}{2}$, substitue eum pro y in primo ac tertio numero supra invento; & evadet primus $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$ ac tertius $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$ ut ante.

PROB. XIV.

Invenire quatuor numeros continue proportionales quorum duo medii simul constituant 12, *& duo extremi* 20.

Sit x secundus numerus; & erit $12 - x$ tertius; $\frac{xx}{12 - x}$ primus; & $\frac{144 - 24x + xx}{x}$ quartus; adeoque $\frac{xx}{12 - x} + \frac{144 - 24x + xx}{x} = 20$. Et per reductionem $xx = 12x - 30\frac{4}{5}$ seu $x = 6 + \sqrt{5\frac{1}{5}}$. Quo invento cæteri numeri è superioribus dantur.

PROB. XV.

Invenire quatuor numeros continue proportionales, quorum datur summa a, & summa quadratorum b.

Etsi desideratas quantitates ut plurimum immediate quærere solemus, siquando tamen duæ obvenerint ambiguæ, hoc est quæ conditionibus omnino similibus præditæ sunt, (ut hic duo medii & duo extremi numerorum quatuor proportionalium) præstat alias quantitates non ambiguas quærere per quas hæ determinantur, quemadmodum

dum harum summam vel differentiam vel rectangulum. Ponamus ergo summam duorum mediorum numerorum esse s, & rectangulum r; & erit summa extremorum $a-s$, & rectangulum etiam r propter proportionalitatem. Jam ut ex his eruantur quatuor illi numeri, pone x primum & y secundum; eritque $s-y$ tertius; & $a-s-x$ quartus; & rectangulum sub mediis $sy-yy=r$, indeque medii $y=\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}ss-r}$ & $s-y=\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}ss-r}$: Item rectangulum sub extremis $ax-sx-xx=r$, indeque extremi $x=\frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4}-r}$, & $a-s-x=\frac{a-s}{2}-\sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4}-r}$.

Summa quadratorum ex hisce quatuor numeris est $2ss-2as+aa-4r$ quæ est $=b$. Ergo $r=\frac{1}{2}ss-\frac{1}{2}as+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}b$, quo substituto pro r prodeunt quatuor numeri ut sequitur.

$$\text{Duo medii}\begin{cases}\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}aa}.\\ \frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}aa}.\end{cases}$$

$$\text{Duo extremi}\begin{cases}\frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss}.\\ \frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss}.\end{cases}$$

Restat tamen etiamnum inquirendus valor ipsius s. Quare ad abbreviandos terminos pro numeris hisce substitue.

$$\frac{1}{2}s+p. \qquad \frac{a-s}{2}+q.$$

&

$$\frac{1}{2}s-p. \qquad \frac{a-s}{2}-q.$$

Et pone rectangulum sub secundo & quarto æquale quadrato tertii siquidem hæc problematis conditio nondum impleatur, eritque

$as-ss$

$\frac{as-ss}{4}-\frac{1}{2}qs+\frac{pa-ps}{2}-pq=\frac{1}{4}ss-ps+pp$. Pone etiam rectangulum ſub primo & tertio æquale quadrato ſecundi, & erit $\frac{as-ss}{4}+\frac{1}{2}qs\frac{-pa+ps}{2}-pq=\frac{1}{4}ss+ps+pp$. Harum æquationum priorem aufer è poſteriori & reſtabit $qs-pa+ps=2ps$, ſeu $qs=pa+ps$. Reſtitue jam $\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}aa}$ in locum p, & $\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss}$ in locum q, & habebitur $s\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss}=\overline{a+s}\times\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}aa}$. Et quadrando $ss=-\frac{b}{a}s+\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}b$, ſeu $s=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{bb}{4aa}+\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}b}$, quo invento dantur quatuor numeri quæſiti è ſuperioribus.

PROB. XVI.

Si penſio annua librarum a *per quinque annos proxime ſequentes ſolvenda, ematur parata pecunia* c, *quæritur quanti æſtimanda ſit uſura uſuræ centum librarum per annum.*

Pone $1-x$ uſuram uſuræ pecuniæ x in anno, hoc eſt quod pecunia 1 poſt annum ſolvenda valeat x paratæ pecuniæ; & per analogiam pecunia a poſt annum ſolvenda valebit ax paratæ pecuniæ, poſt duos annos axx, poſt tres ax^3, poſt quatuor ax^4 & poſt quinque ax^5. Adde jam hos quinque terminos & erit $ax^5+ax^4+ax^3+axx+ax=c$, ſeu $x^5+x^4+x^3+xx+x=\frac{c}{a}$, æquatio quinque dimenſionum, cujus ope cum x per † regulas poſt docendas inventum fuerit, pone $x.1::100.y$. Et erit $y-100$ uſura uſuræ centum librarum per annum.

Atque has in quæſtionibus ubi ſolæ quantitatum proportiones abſque poſitionibus linearum conſiderandæ veniunt, inſtantias dediſſe ſufficiat: Pergamus jam ad Problematum Geometricorum ſolutiones.

† *Nempe inveniendo figuras primas radicis per conſtructionem quamvis mechanicam & reliquas per methodum Vietæ.*

Quomodo Quæstiones Geometricæ ad æquationem redigantur.

TAB. I. Fig. 5.

Quæstiones *Geometricæ* eadem facilitate iisdemque legibus ad æquationes nonnunquam redigi possunt ac quæ de abstractis quantitatibus proponuntur. Ut si recta AB in extrema & media proportione secanda sit in C, hoc est ita ut BE quadratum maximæ partis sit æquale rectangulo BD sub tota & minore parte contento: Posito $AB=a$, & $BC=x$ erit $AC=a-x$, & $xx=a$ in $a-x$; æquatio quæ per reductionem dat $x=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}aa}$.

Sed in rebus Geometricis quæ frequentius occurrunt, à variis linearum positionibus & relationibus complexis ita dependere solent ut egeant ulteriori inventione & artificio quo ad Algebraicos terminos deduci possint. Et licet in hujusmodi casibus difficile sit aliquid præscribere, & cujusque ingenium sibi debeat esse operandi norma: Conabor tamen discentibus viam præsternere. Sciendum est itaque quod quæstiones circa easdem lineas definito quolibet modo sibi invicem relatas, possint varie proponi, ponendo alias atque alias quærendas esse ex aliis atque aliis datis. Sed de quibuscunque tamen datis vel quæsitis instituitur quæstio, solutio ejus eadem plane methodo ex Analyseos serie perficietur, nulla omnino circumstantia variata præter fictas linearum species sive nomina quibus datas à quæsitis solemus distinguere. Quemadmodum si quæstio sit de Isoscele CBD in circulum inscripto, cujus latera BC, BD, & basis CD cum diametro circuli AB conferenda sunt: Ea vel proponi potest de investigatione *diametri* ex datis lateribus & basi, vel de investigatione *basis* ex datis lateribus & diametro, vel denique de investigatione *laterum* ex datis basi & diametro: Sed utcunque proponitur, redigetur ad æquationem per eandem seriem Analyseos. Nempe si quæratur *Diameter* pono $AB=x$, $CD=a$, & BC vel $BD=b$. Tum (ducta AC) propter similia triangula ABC & CBE est AB. BC :: BC. BE, sive $x.b::b.$ BE. Quare BE $\frac{bb}{x}$. Est & CE $=\frac{1}{2}$CD sive $\frac{1}{2}a$: Et propter angulum CEB rectum, $CEq+BEq=BCq$, hoc

TAB. I. Fig. 6.

hoc est $\frac{1}{4}aa+\frac{b^4}{xx}=bb$. Quæ æquatio per reductionem dabit quæsitum x.

Sin quæratur *Basis*, pono $AB=c$, $CD=x$ & BC vel $BD=b$. Tum (ducta AC) propter similia triangula ABC & CBE est $AB.BC::BC.BE$, sive $c.b::b.BE$. Quare $BE=\frac{bb}{c}$. Est & $CE=\frac{1}{2}CD$ sive $\frac{1}{2}x$, & propter angulum CEB rectum $CEq+BEq=BCq$ hoc est $\frac{1}{4}xx+\frac{b^4}{cc}=bb$; æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x.

Atque ita si *Latus* BC vel BD quæratur, pono $AB=c$, $CD=a$ & BC vel $BD=x$. Et (AC ut ante ducta) propter similia triangula ABC & CBE est $AB.BC::BC.BE$; sive $c.x::x.BE$. Quare $BE=\frac{xx}{c}$. Est & $CE=\frac{1}{2}CD$ sive $\frac{1}{2}a$; & propter angulum CEB rectum est $CEq+BEq=BCq$, hoc est $\frac{1}{4}aa+\frac{x^4}{cc}=xx$; æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x.

Vides itaque quod in unoquoque casu calculus quo pervenitur ad æquationem, per omnia similis sit, & eandem æquationem pariat, excepto tantum quod lineas aliis atque aliis literis designavi prout datæ vel quæsitæ ponuntur. Ex diversis quidem datis & quæsitis oritur diversitas in reductione æquationis inventæ: Nam æquationis $\frac{1}{4}aa+\frac{b^4}{xx}=bb$ alia est reductio ut obtineatur $x=\frac{2bb}{\sqrt{4bb-aa}}$ valor de AB, & æquationis $\frac{1}{4}xx+\frac{b^4}{cc}=bb$ alia reductio ut obtineatur $x=\frac{2b}{c}\sqrt{cc-bb}$ valor de CD; & æquationis $\frac{1}{4}aa+\frac{x^4}{cc}=xx$ reductio longe alia ut obtineatur $x=\sqrt{\frac{1}{2}cc\pm\frac{1}{2}c\sqrt{cc-aa}}$ valor de BC vel BD: (perinde ut hæc $\frac{1}{4}aa+\frac{b^4}{cc}=bb$, ad eliciendum c, a,

L 2 vel

vel *b* diversis modis reduci debet:) sed in harum æquationum inventione nulla fuit diversitas. Et hinc est quod jubent ut nullum inter datas & quæsitas quantitates habeatur discrimen. Nam cum eadem computatio cuique casui datorum & quæsitorum competat, convenit ut sine discrimine concipiantur & conferantur quo rectius judicetur de modis computandi. Vel potius convenit ut fingas quæstionem de ejusmodi datis & quæsitis propositam esse per quas arbitreris te posse ad æquationem facillime pervenire.

Proposito igitur aliquo Problemate, quantitates quas involvit confer, & nullo inter datas & quæsitas habito discrimine, perpende quomodo aliæ ex aliis dependeant ut cognoscas quænam si assumantur, synthetice gradiendo, dabunt cæteras. Ad quod faciendum non opus est ut prima fronte de modo cogites quo aliæ ex aliis per calculum Algebraicum deduci possint, sed sufficit animadversio generalis quod possint directo nexu quomodocunque deduci. Verbi gratia; si quæstio sit de circuli diametro AD tribusque lineis AB, BC, & CD in semicirculo inscriptis, & ex reliquis datis quæratur BC; primo intuitu manifestum est diametrum AD determinare semicirculum, dein lineas AB & CD per inscriptionem determinare puncta B & C atque adeo quæsitum BC, idque nexu maxime directo; & quo pacto tamen BC ex his datis per Analysin eruatur non ita manifestum est. Hoc idem quoque de AB vel CD si ex reliquis datis quærerentur, intelligendum est. Quod si AD ex datis AB, BC & CD quæreretur, æque patet id non fieri posse Synthetice; siquidem punctorum A ac D distantia dependet ex angulis B & C, & illi anguli ex circulo cui datæ lineæ sunt inscribendæ, & ille circulus non datur ignota AD diametro. Rei igitur natura postulat ut AD non Synthetice sed ex ejus assumptione quæratur ut ad data fiat regressus.

TAB. I. Fig. 7.

Cum varios ordines quibus termini quæstionis sic evolvi possint perspexeris, *E syntheticis quoslibet adhibe, assumendo lineas tanquam datas à quibus ad alias facillimus videtur progressus & ad ipsas vicissim difficillimus.* Nam computatio ut per varia media possit incedere, tamen ab istis lineis initium sumet; ac promptius perficietur fingendo quæstionem ejusmodi esse ac si de istis datis & quæsito aliquo ab istis facillime prodituro institueretur, quam de quæstione

prout

prout revera proponitur cogitando. Sic in exemplo jam allato si ex reliquis datis quæritur A D; cum id synthetice fieri non posse percipiam, sed ab ipso tamen, si modo daretur, discursum ad alia directo nexu incedere, assumo A D tanquam datum & abinde computationem non secus incipio quam si revera daretur & aliqua ex datis A B, B C & C D quæreretur. Atque hac methodo computationem ab assumptis ad cæteras quantitates eo more promovendo quo linearum relationes dirigunt, æquatio tandem inter duos ejusdem alicujus quantitatis valores semper obtinebitur, sive ex valoribus unus sit litera sub initio operis quantitati pro nomine imposita, & alter per computationem inventus, sive uterque per computationem diversimode institutam inveniatur.

Cæterum ubi terminos quæstionis sic in genere comparaveris, plus artis & inventionis in eo requiritur ut advertas particulares istos nexus sive linearum relationes quæ computationi accommodantur. Nam quæ laxius perpendenti videantur immediate & relatione proxima connecti, cum illam relationem algebraice designare volumus, circuitum plerumque quoad constructiones Schematum de novo moliendas & computationem per gradus promovendam exigunt: Quemadmodum de B C ex A D, A B & C D colligendo constare potest. Per ejusmodi enim propositiones vel enunciationes solummodo gradiendum est quæ aptæ sunt ut terminis algebraicis designentur, quales præsertim ab Axiom. 19, Prop. 4. lib. 6, & Prop. 47. lib. 1. Elem. proveniunt.

Imprimis itaque promovetur calculus per additionem vel subductionem linearum eo ut ex valoribus partium obtineatur valor totius, vel ex valoribus totius & unius partis obtineatur valor alterius.

Secundo promovetur ex linearum proportionalitate: ponimus enim (ut supra) factum à mediis terminis divisum per alterutrum extremorum esse valorem alterius. Vel quod perinde est, si valores omnium quatuor proportionalium prius habeantur, ponimus æqualitatem inter factos extremorum & factos mediorum. Linearum vero proportionalitas ex triangulorum similitudine maxime se prodit, quæ cum ex æqualitate angulorum dignoscatur, in iis comparandis Ana-

lysta debet esse perspicax, atque adeo non ignorabit Prop. 5, 13, 15, 29, & 32. lib. 1. Prop. 4, 5, 6, 7, & 8. lib. 6. Et Prop. 20, 21, 22, 27 ac 31. lib. 3. Elementorum. Quibus etiam referri potest Prop. 3. lib. 6, ubi ex proportionalitate linearum colligitur angulorum æqualitas & contra. Atque idem aliquando præstant Prop. 35 & 36. lib. 3.

Tertio promovetur per additionem vel subductionem quadratorum. In triangulis nempe rectangulis addimus quadrata minorum laterum ut obtineatur quadratum maximi, vel à quadrato maximi lateris subducimus quadratum unius è minoribus ut obtineatur quadratum alterius.

Atque his paucis fundamentis (si adnumeretur Prop. 1. lib. 6. Elem. cum de superficiebus agitur, ut & aliquæ propositiones ex lib. 11 & 12. desumptæ cum agitur de solidis,) tota Ars Analytica quoad Geometriam rectilineam innititur. Quin etiam ad solas linearum ex partibus compositiones & similitudines triangulorum possunt omnes Problematum difficultates reduci; adeo ut non opus sit alia Theoremata adhibere: quippe quæ omnia in hæc duo resolvi possunt, & proinde solutiones etiam quæ ex istis depromuntur. Inque hujus rei instantiam subjunxi Problema de perpendiculo in basem obliquanguli trianguli demittendo sine adjumento Prop. 47. lib. 1 solutum. Etsi vero juvet simplicissima principia à quibus problematum solutiones dependent non ignorasse, & istis solis adhibitis posse quælibet solvere; expeditionis tamen gratia convenit ut non solum Prop. 47. lib. 1. Elem. cujus usus est frequentissimus; sed & alia etiam *Theoremata* nonnunquam adhibeantur.

Quemadmodum si perpendiculo in basem obliquanguli trianguli demisso, de segmentis basis ad calculum promovendum agatur; ex usu erit scire, quod Differentia quadratorum è lateribus æquetur duplo rectangulo sub basi & distantia perpendiculi à medio basis.

Si trianguli alicujus verticalis angulus bisecetur, computationi non solum inserviet quod basis secetur in ratione laterum, sed etiam quod differentia factorum à lateribus & à segmentis basis æquetur quadrato lineæ bisecantis angulum.

Si de figuris in circulo inscriptis res est, Theorema non raro subveniet

veniet quod Inscripti cujuslibet quadrilateri factus à diagoniis æquetur summæ factorum à lateribus oppositis.

Et hujusmodi plura inter exercendum observet Analysta, & in penum forte reservet; sed parcius utatur si pari facilitate aut non multo difficilius possit solutionem è simplicioribus computandi principiis extruere. Quamobrem ad tria primo proposita tanquam notiora, simpliciora, magis generalia, pauca, & omnibus tamen sufficientia animum præsertim advertat, & omnes difficultates ad ea præ cæteris reducere conetur.

Sed ut hujusmodi Theoremata ad solvenda Problemata accommodari possint, *Schemata* plerumque sunt ultra *construenda*, idque sæpissime producendo aliquas ex lineis donec secent alias, aut sint assignatæ longitudinis; vel ab insigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares, vel insigniora puncta conjungendo, ut & aliter nonnunquam construendo, prout exigunt status Problematis, & Theoremata quæ ad ejus solutionem adhibentur. Quemadmodum si duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertia quadam efficiant; producimus forte ut concurrentes constituant triangulum cujus anguli & proinde laterum rationes dantur. Vel si quilibet angulus detur, aut sit alicui æqualis, in triangulum sæpe complemus specie datum, aut alicui simile, idque vel producendo aliquas ex lineis in schemate vel subtensam aliter ducendo. Si triangulum sit obliquangulum, in duo rectangula sæpe resolvimus; demittendo perpendiculum. Si de figuris multilateris agatur, resolvimus in triangula, ducendo lineas diagonales: Et sic in cæteris; ad hanc metam semper collimando *ut schema in triangula vel data, vel similia, vel rectangula resolvatur*. Sic in exemplo proposito duco diagonium BD, ut Trapezium ABCD in duo triangula, ABD rectangulum, & BDC obliquangulum resolvatur. Deinde resolvo triangulum obliquangulum in duo rectangula demittendo perpendiculum à quolibet ejus angulo B, C, vel D in latus oppositum: quemadmodum à B in CD productam ad E ut huic perpendiculo BE occurrat. Interea vero cum anguli BAD & BCD duos rectos (per 22. 3. Elem.) perinde ac BCE & BCD constituant; percipio angulos BAD & BCE æquales esse, adeoque triangula BCE

Tab. I. Fig. 8.

BCE ac DAB similia. Atque ita video computationem (assumendo AD, AB & BC tanquam si CD quæreretur) ad hunc modum institui posse, viz. AD & AB (propter tri. ABD rect.) dant BD. AD, AB, BD & BC (propter sim. tri. ABD & CEB) dant BE & CE. BD & BEC propter triang. BED rect.) dant ED; & ED − EC dat CD. Unde obtinebitur æquatio inter valorem de CD sic inventum & literam pro ea suffectam. Possumus etiam (& maximam partem satius est quam opus in serie continuata nimis prosequi,) à diversis principiis computationem incipere, aut saltem diversis modis ad eandem quamlibet conclusionem promovere, ut duo tandem obtineantur ejusdem cujusvis quantitatis valores qui æquales ponantur. Sic AD, AB & BC dant BD, BE & CE ut prius; deinde CD+CE dat ED; ac denique BD & ED (propter triang. rect. BED) dant BE. Potest etiam computatio hac lege optime institui ut valores quantitatum investigentur quibus alia quæpiam relatio cognita intercedit, & illa deinde relatio æquationem dabit. Sic cum relatio inter lineas BD, DC, BC & CE ex Prop. 12. lib. 2. Elem. constet; nempe quod sit $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$: Quæro BDq ex assumptis AD & AB; ac CE ex assumptis AD, AB & BC. Et assumendo denique CD facio $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$. Ad hos modos & hujusmodi consiliis ductus, de serie Analyseos, deque schemate propter eam construendo semper debes una prospicere.

Ex his credo manifestum est quid sibi velint Geometræ cum jubent putes factum esse quod quæris. Nullo enim inter cognitas & incognitas quantitates habito discrimine, quaslibet ad ineundum calculum assumere potes quasi omnes ex prævia solutione fuissent notæ, & non amplius de solutione Problematis, sed de probatione solutionis ageretur. Sic in primo ex tribus jam descriptis computandi modis, etsi forte AD revera quæratur, fingo tamen CD quærendum esse, quasi vellem probare an valor ejus ab AD derivatus quadret cum ejus quantitate prius cognita. Sic etiam in duobus posterioribus modis pro meta non propono quantitatem aliquam quærendam esse, sed æquationem è relationibus

tibus linearum utcunque eruendam: Et in ejus rei gratiam assumo omnes AD, AB, BC, & CD tanquam notas, perinde ac si (quæstione prius soluta) de tentamine jam ageretur an conditionibus ejus hæ probe satisfaciant, quadrando cum quibuslibet æquationibus quas linearum relationes produnt. Opus quidem hac ratione & consiliis prima fronte aggressus sum, sed cum ad æquationem deventum est sententiam muto, & quantitatem desideratam per istius æquationis reductionem & solutionem quæro. Sic denique plures quantitates tanquam cognitas sæpenumero assumimus quam in statu quæstionis exprimuntur. Hujusque rei insignem in 55° sequentium problematum instantiam videre est, ubi a, b & c in æquatione $aa+bx+cxx=yy$, pro determinatione Sectionis Conicæ assumpsi, ut & alias etiam lineas r, s, t, v de quibus Problema prout proponitur nihil innuit. Nam quaslibet quantitates assumere licet quarum ope possibile sit ad æquationes pervenire: Hoc solum cavendo ut ex illis tot æquationes obtineri possint quot assumptæ sunt quantitates revera incognitæ.

Postquam de computandi methodo constat & ornatur schema, quantitatibus quæ computationem ingrediuntur (hoc est ex quibus assumptis aliarum valores derivandi sunt, donec tandem ad æquationem perveniatur) nomina impone, delegendo quæ problematis omnes conditiones involvunt, & operi præ cæteris accommodatæ videntur, & conclusionem (quantum possis conjicere) simpliciorem reddent, sed non plures tamen quam proposito sufficiunt. Itaque pro quantitatibus quæ ex aliarum vocabulis facile deduci possint, propria vocabula vix tribuas. Sic ex tota linea & ejus partibus, ex tribus lateribus trianguli rectanguli, & ex tribus vel quatuor proportionalibus unum aliquod mininùm sine nomine permittere solemùs, eo quod valor ejus è reliquorum nominibus facile derivari possit. Quemadmodum in exemplo jam allato si dicam $AD=x$ & $AB=a$ ipsum BD nulla litera designo quod sit tertium latus trianguli rectanguli ABD & proinde valeat $\sqrt{xx-aa}$. Dein si dicam $BC=b$, cum triangula DAB & BCE sint similia & inde lineæ AD.AB::BC.CE proportionales, quarum tribus AD, AB, & BC imposita sunt nomina; ea propter quartam CE sine nomine per- **Tab. I. Fig. 8.**

permitto, & ejus vice valorem $\frac{ab}{x}$ ex hac proportionalitate detectum usurpo. Atque ita si DC vocetur c, ipsi DE nomen non assigno quod ex partibus ejus DC & CE, sive c & $\frac{ab}{x}$, valor $c+\frac{ab}{x}$ prodeat.

Cæterum dum de his moneo, Problema ad æquationem pene redactum est. Nam postquam literæ pro speciebus principalium linearum præscriptæ sunt, nihil aliud agendum restat quam ut ex istis speciebus valores aliarum linearum juxta methodum præconceptam eruantur, donec modo quovis proviso in æquationem coëant. Et in hoc casu nihil restare video nisi ut per triangula rectangula BCE & BDE dupliciter eliciam BE. Nempe est $BCq-CEq$ (sive $bb-\frac{aabb}{xx}$) $=BEq$, ut & $BDq-DEq$ (sive $xx-aa-cc-\frac{2abc}{x}-\frac{aabb}{xx}$) $=BEq$. Et hinc (utrobique deleto $\frac{aabb}{xx}$) æquationem habebo $bb=xx-aa-cc-\frac{2abc}{x}$: Quæ reducta fit

$$x^3 = \begin{matrix}+aa\\+bb\\+cc\end{matrix}\,x + 2abc.$$

Cum vero de solutione Problematis hujus plures modos etsi non multum dissimiles in præcedentibus recensuerim quorum iste de Prop. 12. Lib. 2. Elem. desumptus sit cæteris quodammodo concinnior; eundem placet etiam subjungere. Sit itaque $AD=x$, $AB=a$, $BC=b$, & $CD=c$, eritque $BDq=xx-aa$, & $CE=\frac{ab}{x}$ ut prius. Hisce dein speciebus in Theorema $BDq-BCq-CDq=2CD\times CE$ substitutis orietur $xx-aa-bb-cc=\frac{2abc}{x}$; & facta reductione

$$x^3 = \begin{matrix}+aa\\+bb\\+cc\end{matrix}\,x + 2abc.$$

Ut ante.

Sed ut pateat quanta sit in solutionum inventione varietas, & proinde

proinde quod in eas incidere prudenti Geometræ non sit admodum difficile: Visum fuit plures adhuc modos hoc idem perficiendi docere. Atque equidem ducto Diagonio BD si vice perpendiculi BE à puncto B in latus DC supra demissi demittatur perpendiculum à puncto D in latus BC vel à puncto C in latus BD, quo obliquangulum triangulum BCD in duo rectangula utcunque resolvatur, iisdem ferme quas jam descripsi methodis ad æquationem pervenire licet. Sunt & alii modi ab istis satis differentes.

Quemadmodum si diagonii duo AC & BD ducantur, dabitur BD ex assumptis AD & AB; ut & AC ex assumptis AD & CD; deinde per notum Theorema de figuris quadrilateris in circulo inscriptis, nempe quod sit $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$ obtinebitur æquatio. Stantibus itaque linearum AD, AB, BC, CD vocabulis x, a, b, c; erit $BD = \sqrt{xx-aa}$ & $AC = \sqrt{xx-cc}$ per 47. 1. Elem. Et his linearum speciebus in Theorema jam recensitum substitutis, exibit $xb+ac = \sqrt{xx-cc} \times \sqrt{xx-aa}$. Cujus æquationis partibus denique quadratis & reductis obtinebitur iterum $x^3 = \begin{matrix}+aa\\+bb\\+cc\end{matrix}\, x + 2abc$. Tab. I. Fig. 9.

Cæterum ut pateat etiam quo pacto solutiones ex isto Theoremate petitæ possint inde ad solas triangulorum similitudines redigi; erigatur BH ipsi BC perpendicularis & occurrens AC in H, & fient triangula BCH, BDA similia, propter angulos ad B rectos, & ad C ac D (per 21. 3. Elem.) æquales; ut & triangula BCD, BHA similia, propter æquales angulos tum ad B (ut pateat demendo communem angulum DBH à duobus rectis,) tum ad D ac A (per 21. 3. Elem.). Videre est itaque quod ex proportionalitate BD. AD :: BC. HC detur HC; ut & AH ex proportionalitate BD. CD :: AB. AH. Unde cum sit $AH + HC = AC$, habebitur æquatio. Stantibus ergo præfatis linearum vocabulis x, a, b, c, nec non ipsarum AC & BD valoribus $\sqrt{xx-cc}$ & $\sqrt{xx-aa}$; prima proportionalitas dabit $HC = \frac{bx}{\sqrt{xx-aa}}$, & secunda dabit $AH = \frac{ac}{\sqrt{xx-aa}}$.

 Unde

Unde propter AH+HC=AC erit $\frac{bx+ac}{\sqrt{xx-aa}} = \sqrt{xx-cc}$; æquatio quæ (multiplicando per $\sqrt{xx-aa}$ & quadrando) reducetur ad formam in præcedentibus sæpius descriptam.

Tab I. Fig. 10. Adhæc ut magis pateat quanta sit solvendi copia; producantur BC & AD donec conveniant in F, & fient triangula ABF & CDF similia, quippe quorum angulus ad F communis est, & anguli ABF & CDF (dum complent ang. CDA ad duos rectos per 13. 1 & 22. 3. Elem.) æquales. Quamobrem si præter quatuor terminos de quibus instituitur quæstio, daretur AF, proportio AB. AF :: CD. CF daret CF. Item AF − AD daret DF, & proportio CD. DF :: AB BF daret BF; unde (cum sit BF − CF = BC) emergeret æquatio. Sed cum duæ quantitates incognitæ AD ac DF tanquam datæ assumantur, restat alia æquatio invenienda. Demitto ergo BG in AF ad rectos angulos, & proportio AD. AB :: AB. AG. dabit AG; quo habito, Theorema è 13. 2. Elem. petitum, nempe quod sit BFq + 2 FAG = ABq + AFq, dabit æquationem alteram. Stantibus ergo a, b, c, x ut prius, & dicto AF = y: erit (insistendo vestigiis Theoriæ jam excogitatæ) $\frac{cy}{a}$ = CF. $y - x$ = DF. $\frac{\overline{y-x} \times a}{c}$ = BF. Indeque $\frac{\overline{y-x} \times a}{c} - \frac{cy}{a} = b$, æquatio prima. Erit etiam $\frac{aa}{x}$ = AG, adeoque $\frac{aayy - 2aaxy + aaxx}{cc} + \frac{2aay}{x} = aa + yy$, æquatio secunda. Quæ duæ per reductionem dabunt æquationem desideratam. Nempe valor ipsius y per æquationem priorem inventus est $\frac{abc + aax}{aa - cc}$, qui in secundam substitutus, dabit æquationem ex qua recte disposita fiet $x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x + 2abc$, ut ante.

Atque ita si AB ac DC producantur donec sibi mutuo occurrant, solutio haud aliter se habebit, nisi forte futura sit paulo facilior. Quare aliud hujus rei specimen è fonte multum dissimili petitum potius subjungam, quærendo nempe aream quadrilateri propositi, idque dupliciter. Duco igitur diagonium BD ut in duo triangula qua-

quadrilaterum resolvatur. Dein usurpatis linearum vocabulis x, a, b, c ut ante, invenio $BD = \sqrt{xx-aa}$ indeque $\frac{1}{2}a\sqrt{xx-aa}$ $(=\frac{1}{2}AB \times BD)$ aream trianguli ABD. Porro demisso BE perpendiculariter in CD, (erit propter similia triangula ABD, BCE) $AD.BD::BC.BE$, & proinde $BE = \frac{b}{x}\sqrt{xx-aa}$. Quare etiam $\frac{bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ $(=\frac{1}{2}CD \times BE)$ erit area trianguli BCD. Hasce jam areas addendo oritur $\frac{ax+bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ area totius quadrilateri. Non secus ducendo diagonium AC & quaerendo areas triangulorum ACD & ACB, easque addendo, rursus obtinebitur area quadrilateri $\frac{cx+ba}{2x}\sqrt{xx-cc}$. Quare ponendo hasce areas aequales & utrasque multiplicando per $2x$, habebitur $\overline{ax+bc}\sqrt{xx-aa} = \overline{cx+ba} \times \sqrt{xx-cc}$, aequatio quae quadrando ac dividendo per $aax-ccx$ redigetur ad formam saepius inventam $x^3 = \begin{smallmatrix}+aa\\+bb\\+cc\end{smallmatrix}x + 2abc$.

Ex his constare potest quanta sit solvendi copia & obiter quod alii modi sint aliis multo concinniores. Quapropter si in primas de solutione Problematis alicujus cogitationes modus computationi male accommodatus inciderit, relationes linearum iterum evolvendae sunt donec modum quám poteris idoneum & elegantem machinatus fueris. Nam quae leviori curae se offerunt laborem satis molestum plerumque parient si ad opus adhibeantur. Sic in Problemate de quo agitur nil difficilius foret in sequentem modum quam in aliquem è praecedentibus incidere. Demissis nempe BR & CS ad AD normalibus, ut & CT ad BR, figura resolvetur in triangula rectangula. Et videre est quod AD & AB dant AR, AD & CD dant SD, $AD-AR-SD$ dat RS vel TC. Item AB & AR dant BR, CD & SD dant CS vel TR, & $BR-TR$ dat BT. Denique BT ac TC dant BC, unde obtinebitur aequatio. Siquis autem hoc modo computationem aggressus fuerit, is in terminos Algebraicos profusiores quam sunt ulli praecedentium incidet & ad finalem aequationem aegrius reducibiles.

Tab. I. Fig. 11.

 Et

Et hæc de solutione problematum in rectilinea Geometria; nisi forte operæ pretium fuerit annotasse præterea quod cum anguli sive positiones linearum per angulos expressæ statum quæstionis ingrediuntur, angulorum vice debent adhiberi lineæ aut linearum proportiones, tales nempe quæ ab angulis datis possunt per calculum Trigonometricum derivari; aut à quibus inventis anguli quæsiti per eundem calculum prodeunt; hoc est quæ se mutuo determinant: cujus rei plures instantias videre est in sequentibus.

Quod ad Geometriam circa lineas curvas attinet, illæ designari solent vel describendo eas per motum localem rectarum, vel adhibendo æquationes indefinite exprimentes relationem rectarum certa aliqua lege dispositarum & ad curvas desinentium. Idem fecerunt Veteres per sectiones Solidorum, sed minus commode. Computationes vero quæ curvas primo modo descriptas respiciunt haud secus quam in præcedentibus peraguntur. Quemadmodum si AKC sit curva linea descripta per K verticale punctum normæ AKϕ, cujus unum crus AK per punctum A positione datum libere dilabitur, dum alterum Kϕ datæ longitudinis super rectam AD positione datam promovetur, & quæratur punctum C in quo recta quævis CD positione data hanc curvam secabit; duco rectas ACF quæ normam in positione quæsita referant, & relatione linearum (sine aliquo dati & quæsiti discrimine aut respectu ad curvam) considerata, percipio dependentiam cæterarum à CF & qualibet harum quatuor BC, BF, AF & AC Syntheticam esse; quarum duas itaque ut $CF=a$ & $CB=x$ assumo, & inde computum ordiendo statim lucratus sum $BF=\sqrt{aa-xx}$ & $AB=\frac{xx}{\sqrt{aa-xx}}$ propter ang. rectum CBF, lineasque BF. BC :: BC. AB continue proportionales. Porro ex data positione CD datur AD quam itaque dico b, datur etiam ratio BC ad BD quam pono d ad e & fit $BD=\frac{ex}{d}$ & $AB=b-\frac{ex}{d}$. Est ergo $b-\frac{ex}{d}=\frac{xx}{\sqrt{aa-xx}}$, æquatio quæ (quadrando partes & multiplicando per $aa-xx$ &c.) reducetur ad hanc formam

Tab. I. Fig. 12.

$x^4=$

$x^4 = \dfrac{2bdex^3 \begin{matrix} -bbdd \\ +aaee \end{matrix} xx - 2aabdex + aabbdd}{dd+ee}$; unde demum è datis a, b, d, & e erui debet x per regulas post tradendas, & intervallo isto x sive BC acta ipsi AD parallela recta secabit CD in quæsito puncto C.

Quod si non descriptiones Geometricæ sed æquationes pro curvis lineis designandis adhibeantur, computationes eo pacto faciliores & breviores evadent, in quantum ejusmodi æquationes ipsis lucro cedunt. Quemadmodum si datæ Ellipseos ACE intersectio C cum recta CD positione data quæratur; pro Ellipsi designanda sumo notam aliquam æquationem ei propriam, ut $rx - \frac{r}{q}xx = yy$ ubi x indefinite ponitur pro qualibet axis parte Ab vel AB, & y pro perpendiculo bc vel BC ad curvam terminato; r vero & q dantur ex datâ specie Ellipsis. Cum itaque CD positione detur, dabitur & AD, quam dic a; & erit BD $a - x$, dabitur etiam angulus ADC & inde ratio BD ad BC quam dic 1 ad e, & erit BC (y) $= ea - ex$, cujus quadratum $eeaa - 2eeax + eexx$ æquabitur $rx - \frac{r}{q}xx$. Indeque per reductionem orietur Tab. I. Fig. 13.

$$xx = \frac{2aeex + rx - aaee}{ee + \frac{r}{q}}, \text{ seu } x = \frac{aee + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{rr}{4ee} - \frac{aar}{q}}}{ee + \frac{r}{q}}.$$

Quinetiam etsi Curva per descriptionem Geometricam vel per sectionem solidi designetur, potest tamen inde æquatio obtineri quæ naturam Curvæ definiet, adeoque huc omnes Problematum quæ circa eam proponuntur difficultates reduci.

Sic in exemplo priori si AB dicatur x & BC y, tertia proportionalis BF erit $\frac{yy}{x}$, cujus quadratum una cum quadrato BC æquatur CFq, hoc est $\frac{y^4}{xx} + yy = aa$; sive $y^4 + xxyy = aaxx$. Estque hæc æquatio qua Curvæ AKC unumquodque punctum C unicuique Tab. I. Fig. 12.

cuique basis longitudini AB congruens (adeoque ipsa Curva) definitur, & è qua proinde solutiones Problematum quæ de hac curva proponuntur petere liceat.

Ad eundem fere modum cum curva non datur specie sed determinanda proponitur, possis pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat; & hanc pro ea designanda tanquam si daretur assumere, ut ex ejus assumptione quomodocunque perveniatur ad æquationes ex quibus assumpta tandem determinentur: Cujus rei exempla habes in nonnullis sequentium problematum quæ in pleniorem illustrationem hujus doctrinæ & exercitium discentium congessi, quæque jam pergo tradere.

PROB. I.

Tab. I. Fig. 14.

Data recta terminata BC a cujus extremitatibus duæ rectæ BA, CA, ducuntur in datis angulis ABC, ACB: Invenire AD altitudinem concursus A supra datam BC.

SIT BC$=a$, & AD$=y$; & cum angulus ABD detur, dabitur (ex tabula sinuum vel tangentium) ratio inter lineas AD & BD quam pone ut d ad e. Est ergo $d.e::$AD(y). BD Quare BD$=\frac{ey}{d}$. Similiter propter datum angulum ACD dabitur ratio inter AD ac DC quam pone ut d ad f & erit DC$=\frac{fy}{d}$. At BD+DC=BC, hoc est $\frac{ey}{d}+\frac{fy}{d}=a$. Quæ reducta multiplicando utramque partem æquationis per d, ac dividendo per $e+f$ evadit $y=\frac{ad}{e+f}$.

PROB.

PROB. II.

Cujuslibet Trianguli ABC datis lateribus AB, AC, & Basi BC, quam perpendiculum AD ab angulo verticali secat in D: Invenire segmenta BD ac DC. Tab. I. Fig. 15.

SIT $AB=a$, $AC=b$, $BC=c$, & $BD=x$, eritque $DC=c-x$. Jam cum $ABq-BDq\,(aa-xx)=ADq$; & $ACq-DCq$ $(bb-cc+2cx-xx)=ADq$: Erit $aa-xx=bb-cc+2cx-xx$; quæ per reductionem fit $\frac{aa-bb+cc}{2c}=x$.

Cæterum ut pateat omnes omnium Problematum difficultates per solam linearum proportionalitatem sine adminiculo Prop. 47. primi Elementorum, licet non absque circuitu, enodari posse; placuit sequentem hujus solutionem ex abundanti subjungere. A puncto D in latus AB demitte DE normalem, & stantibus jam positis linearum nominibus, erit AB. BD::BD. BE. $a.x::x.\frac{xx}{a}$. Et $BA-BE\,(a-\frac{xx}{a})=EA$. Nec non EA. AD::AD. AB adeoque $EA\times AB\,(aa-xx)=ADq$. Et sic ratiocinando circa triangulum ACD invenietur iterum $ADq=bb-cc+2cx-xx$. Unde obtinebitur ut ante $x=\frac{aa-bb+cc}{2c}$.

PROB. III.

Trianguli rectanguli ABC perimetro & area datis invenire hypotenusam BC. Tab. II. Fig. 1.

ESTO perimeter a, area bb, $BC=x$, & $AC=y$; eritque $AB=\sqrt{xx-yy}$; unde rursus perimeter $(BC+AC+AB)$ est $x+y+\sqrt{xx-yy}$, & area $(\frac{1}{2}AC\times AB)$ est $\frac{1}{2}y\sqrt{xx-yy}$. Adeoque $x+y+\sqrt{xx-yy}=a$, & $\frac{1}{2}y\sqrt{xx-yy}=bb$.

Harum æquationum posterior dat $\sqrt{xx-yy}=\frac{2bb}{y}$ quare scribo

$\frac{2bb}{y}$ pro $\sqrt{xx-yy}$ in æquatione priori ut aſſymmetria tollatur; & prodit $x+y+\frac{2bb}{y}=a$, ſive multiplicando per y, & ordinando $yy=ay-xy-2bb$. Porro ex partibus æquationis prioris aufero $x+y$ & reſtat $\sqrt{xx-yy}=a-x-y$, cujus partes quadrando ut aſſymmetria rurſus tollatur, prodit $xx-yy=aa-2ax-2ay+xx+2xy+yy$, quæ in ordinem redacta & per 2 diviſa fit $yy=ay-xy+ax-\frac{1}{2}aa$. Denique ponendo æqualitatem inter duos valores ipſius yy, habeo $ay-xy-2bb=ay-xy+ax-\frac{1}{2}aa$, quæ reducta fit $\frac{1}{2}a-\frac{2bb}{a}=x$.

Idem aliter.

Eſto ½ perimeter $=a$, area $=bb$, & $BC=x$ eritque $AC+AB=2a-x$. Jam cum ſit xx $(BCq)=ACq+ABq$, & $4bb=2AC\times AB$, erit $xx+4bb=ACq+ABq+2AC\times AB=$ quadrato ex $AC+AB=$ quadrato ex $2a-x=4aa-4ax+xx$. Hoc eſt $xx+4bb=4aa-4ax+xx$; quæ reducta fit $a-\frac{bb}{a}=x$.

PROB. IV.

Dato trianguli rectanguli perimetro & perpendiculo, invenire triangulum.

TAB. II. Fig. 10. Trianguli ABC ſit C rectus angulus & CD perpendiculum inde ad baſem AB demiſſum. Detur $AB+BC+AC=a$, & $CD=b$. Pone baſem $AB=x$, & erit laterum ſumma $a-x$. Pone laterum differentiam y, & erit majus latus $AC=\frac{a-x+y}{2}$; minus $BC=\frac{a-x-y}{2}$. Jam ex natura trianguli rectanguli eſt $ACq+BCq=ABq$, hoc eſt $\frac{aa-2ax+xx+yy}{2}=xx$. Eſt &

AB.

AB. AC::BC. DC, adeoque $AB \times DC = AC \times BC$, hoc eſt $bx = \frac{aa - 2ax + xx - yy}{4}$. Per priorem æquationem eſt $yy = xx + 2ax - aa$. Per poſteriorem $yy = xx - 2ax + aa - 4bx$. Adeoque $xx + 2ax - aa = xx - 2ax + aa - 4bx$. Et per reductionem $4ax + 4bx = 2aa$, ſive $x = \frac{aa}{2a + 2b}$.

Geometrice ſic. In omni triangulo rectangulo, ut eſt ſumma perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita dimidium perimetri ad baſem.

Aufer $2x$ de a, & reſtabit $\frac{ab}{a+b}$ exceſſus laterum ſuper baſem. Unde rurſus, Ut in omni triangulo rectangulo, ſumma perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita perpendiculum ad exceſſum laterum ſuper baſem.

PROB. V.

Datis trianguli rectanguli baſi AB, & ſumma perpendiculi & laterum CA+CB+CD, invenire triangulum. TAB. II. Fig. 10.

Eſto $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, $CD = x$, & erit $AC + CB = a - x$. Pone $AC - CB = y$, & erit $AC = \frac{a - x + y}{2}$, & $CB = \frac{a - x - y}{2}$. Eſt autem $ACq + CBq = ABq$, hoc eſt $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = bb$. Eſt & $AC \times CB = AB \times CD$, hoc eſt $\frac{aa - 2ax + xx - yy}{4} = bx$. Quibus comparatis fit $2bb - aa + 2ax - xx = yy = aa - 2ax + xx - 4bx$. Et per reductionem $xx = 2ax + 2bx - aa + bb$, & $x = a + b - \sqrt{2ab + 2bb}$.

Geometrice ſic. In omni triangulo rectangulo de ſumma perimetri

 &

& perpendiculi aufer mediam proportionalem inter eandem summam & duplum basis, & restabit perpendiculum.

Idem aliter.

Sit $CA+CB+CD=a$, $AB=b$, & $AC=x$, & erit $BC=\sqrt{bb-xx}$, $CD=\frac{x\sqrt{bb-xx}}{b}$. Et $x+CB+CD=a$, sive $CB+CD=a-x$, atque adeo $\frac{b+x}{b}\sqrt{bb-xx}=a-x$. Et quadratis partibus atque multiplicatis per bb, fiet $-x^4-2bx^3+2b^3x+b^4=aabb-2abbx+bbxx$. Qua æquatione per transpositionem partium ad hunc modum ordinata $x^4+2bx^3\begin{matrix}+3bb\\+2ab\end{matrix}xx\begin{matrix}+2b^3\\+2abb\end{matrix}x\begin{matrix}+b^4\\+2ab^3\\+aabb\end{matrix}=\begin{matrix}2bb\\+2ab\end{matrix}xx\begin{matrix}+4b^3\\+4abb\end{matrix}x\begin{matrix}+2b^4\\+2ab^3\end{matrix}$, & extracta utrobique radice, orietur $xx+bx+bb+ab=\overline{x+b}\sqrt{2ab+2bb}$. Et extracta iterum radice $x=-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}ab}\pm\sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}ab}-\frac{1}{4}bb-\frac{1}{2}ab}$.

Constructio Geometrica.

TAB. II. Fig. 2.

Cape igitur $AB=\frac{1}{2}b$, $BC=\frac{1}{2}a$, $CD=\frac{1}{2}AB$, AE mediam proportionalem inter b & AC, & EF hinc inde mediam proportionalem inter b & DE, & erunt BF, BF duo latera trianguli.

PROB. VI.

TAB. II. Fig. 10.

Datis in triangulo rectangulo ABC summa laterum AC+BC, & perpendiculo CD invenire triangulum.

SIT $AC+BC=a$, $CD=b$, $AC=x$, & erit $BC=a-x$, $AB=\sqrt{aa-2ax+2xx}$. Est & $CD.AC::BC.AB$. Ergo rursus $AB=\frac{ax-xx}{b}$. Quare $ax-xx=b\sqrt{aa-2ax+2xx}$,

&

& partibus quadratis & ordinatis $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +aa \\ -2bb \end{matrix} xx + 2abbx - aabb = 0$. Adde ad utramque partem $aabb + b^4$, & fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +aa \\ -2bb \end{matrix} xx + 2abbx + b^4 = aabb + b^4$. Et extracta utrobique radice $xx - ax - bb = -b \times \sqrt{aa+bb}$, & radice iterum extracta $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb - b\sqrt{aa+bb}}$.

Constructio Geometrica.

Cape $AB = BC = \frac{1}{2}a$. Ad C erige perpendiculum $CD = b$. Produc DC ad E ut sit $DE = DA$. Et inter CD & CE cape medium proportionale CF. Centroque F, radio BC descriptus circulus GH secet rectam BC in G & H, & erunt BG & BH latera duo trianguli. TAB. II. Fig. 3.

Idem aliter.

Sit $AC + BC = a$, $AC - BC = y$, $AB = x$, ac $DC = b$, & erit $\frac{a+y}{2} = AC$, $\frac{a-y}{2} = BC$, $\frac{aa+yy}{2} = ACq + BCq = ABq = xx$. $\frac{aa-yy}{4b} = \frac{AC \times BC}{DC} = AB = x$. Ergo $2xx - aa = yy = aa - 4bx$, & $xx = aa - 2bx$, & extracta radice $x = -b + \sqrt{bb+aa}$. Unde in superiori constructione est CE Hypotenusa trianguli quæsiti. Data autem basi & perpendiculo tam in hoc quam in superiore Problemate, triangulum sic expedite construitur. Fac parallelogrammum CG cujus latus CE erit basis trianguli, latus alterum CF perpendiculum. Et super CE describe semicirculum secantem latus oppositum FG in H. Age CH, EH, & erit CHE triangulum quæsitum. TAB. II. Fig. 10. TAB. II. Fig. 4.

PROB. VII.

In triangulo rectangulo, datis summa laterum, & summa perpendiculi & basis invenire Triangulum.

TAB. II. Fig. 10.

SIT laterum AC & BC summa a, basis AB & perpendiculi CD summa b, latus AC $= x$, basis AB $= y$, & erit BC $= a - x$, CD $= b - y$, $aa - 2ax + 2xx = ACq + BCq = ABq = yy$, $ax - xx = AC \times BC = AB \times CD = by - yy = by - aa + 2ax - 2xx$, & $by = aa - ax + xx$. Hujus quadratum $a^4 - 2a^3x + 3aaxx - 2ax^3 + x^4$, pone æquale yy in bb, hoc est æquale $aabb - 2abbx + 2bbxx$. Et ordinata æquatione fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +3aa \\ -2bb \end{matrix} xx \begin{matrix} -2a^3 \\ +2abb \end{matrix} x \begin{matrix} +a^4 \\ -aabb \end{matrix} = 0$. Ad utramque partem æquationis adde $b^4 - aabb$, & fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +3aa \\ -2bb \end{matrix} xx \begin{matrix} -2a^3 \\ +2abb \end{matrix} x \begin{matrix} +a^4 \\ -2aabb \\ +b^4 \end{matrix} = b^4 - aabb$. Et extracta utrobique radice $xx - ax + aa - bb = -b\sqrt{bb - aa}$. & radice iterum extracta $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{bb - \frac{3}{4}aa - b\sqrt{bb - aa}}$.

Constructio Geometrica.

Cape R mediam proportionalem inter $b + a$ & $b - a$, & S mediam proportionalem inter R & $b - $R, & T mediam proportionalem inter $\frac{1}{2}a + $S & $\frac{1}{2}a - $S, & erunt $\frac{1}{2}a + $T & $\frac{1}{2}a - $T, latera trianguli.

PROB. VIII.

Trianguli cujuscunque ABC, datis area, perimetro, & uno angulorum A, cætera determinare.

TAB. II. Fig. 5.

ESTO perimeter $= a$, & area $= bb$, & ab ignotorum angulorum alterutro C ad latus oppositum AB demitte perpendiculum CD; & propter angulum A datum, erit AC ad CD in data ratione,

tione, puta d ad e. Dic ergo $AC = x$ & erit $CD = \frac{ex}{d}$, per quam divide duplam aream, & prodibit $\frac{2bbd}{ex} = AB$. Adde AD (nempe $\sqrt{ACq - CDq}$, sive $\frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$) & emerget $BD = \frac{2bbd}{ex} + \frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$; cujus quadrato adde CDq & orietur $\frac{4b^4dd}{eexx} + xx + \frac{4bb}{e} \times \sqrt{dd - ee} = BCq$. Adhæc à perimetro aufer AC & AB, & restabit $a - x - \frac{2bbd}{ex} = BC$, cujus quadratum $aa - 2ax + xx - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e} + \frac{4b^4dd}{eexx}$ pone æquale quadrato prius invento; &, neglectis æquipollentibus, erit $\frac{4bb}{e}\sqrt{dd - ee} = aa - 2ax - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e}$. Et hæc, assumendo $4af$ pro datis terminis $aa + \frac{4bbd}{e} - \frac{4bb}{e} \times \sqrt{dd - ee}$, & reducendo, evadit $xx = 2fx - \frac{2bbd}{e}$, sive $x = f \pm \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$.

Eadem æquatio prodiisset etiam quærendo crus AB; nam crura AB & AC similiter se habent ad omnes conditiones problematis. Quare si AC ponatur $f - \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$ erit $AB = f + \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$, & vicissim; atque horum summa $2f$ subducta de perimetro relinquit tertium latus $BC = a - 2f$.

PROB. IX.

Datis altitudine, basi, & summa laterum invenire triangulum.

SIT altitudo $CD = a$, basis AB dimidium $= b$, laterum semisumma $= c$, & semidifferentia $= z$; eritque majus latus, puta BC Tab. II. Fig. 5.

$BC = c+z$, & minus $AC = c-z$. Subduc CDq de BCq & ACq, & exibit hinc $BD = \sqrt{cc+2cz+zz-aa}$, & inde $AD = \sqrt{cc-2cz+zz-aa}$. Subduc etiam AB de BD & exibit iterum $AD = \sqrt{cc+2cz+zz-aa}-2b$. Quadratis jam valoribus AD & ordinatis terminis, orietur $bb+cz = b\sqrt{cc+2cz+zz-aa}$. Rursusque quadrando & redigendo in ordinem obtinebitur $cczz - bbzz = bbcc - bbaa - b^4$. Et $z = b\sqrt{1-\frac{aa}{cc-bb}}$. Unde dantur latera.

PROB. X.

Datis basi AB, summa laterum AC+BC, & angulo verticali C, determinare latera.

TAB. II. Fig. 6. SIT basis $=a$, semisumma laterum $=b$, & semidifferentia $=x$, eritque majus latus $BC = b+x$ & minus $AC = b-x$. Ab alterutro ignotorum angulorum A ad latus oppositum BC demitte perpendiculum AD & propter angulum C datum dabitur ratio AC ad CD puta d ad e, & proinde erit $CD = \frac{eb-ex}{d}$. Est etiam per 13. II. Elementorum $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC}$ hoc est $\frac{2bb+2xx-aa}{2b+2x} = CD$; adeoque habetur æquatio inter valores CD. Et hæc reducta fit $x = \sqrt{\frac{daa+2ebb-2dbb}{2d+2e}}$. Unde dantur latera.

Si anguli ad basin quærerentur, conclusio foret concinnior; utpote ducatur EC datum angulum bisecans & basi occurrens in E; & erit $AB.AC+BC$ (: : $AE.AC$) : : sin. ang. ACE. sin. ang. AEC. Et ab angulo AEC ejusque complemento BEC si subducatur dimidium anguli C relinquentur anguli ABC & BAC.

PROB.

PROB. XI.

Datis Trianguli lateribus invenire angulos.

Dentur latera $AB=a$, $AC=b$, $BC=c$, quæratur angulus A. Demisso ad AB perpendiculo CD quod angulo isti opponitur, erit imprimis $bb-cc=ACq-BCq=ADq-BDq=\overline{AD+BD}\times\overline{AD-BD}=AB\times\overline{2AD-AB}=2AD\times a-aa$. Adeoque $\frac{1}{2}a+\frac{bb-cc}{2a}=AD$. Unde prodit hocce *primum Theorema*. Tab. II. Fig. 7.

I. Ut AB, ad AC+BC, ita AC−BC, ad quartam proportionalem N. $\frac{AB+N}{2}=AD$. Ut AC ad AD, ita radius ad Cosinum anguli A.

Adhæc $DCq=ACq-ADq=\frac{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}{4aa}$ $=\frac{\overline{a+b+c}\times\overline{a+b-c}\times\overline{a-b+c}\times\overline{-a+b+c}}{4aa}$ Unde multiplicatis numeratoris & denominatoris radicibus per b, conflatur hocce *Theorema secundum*.

II. Ut $2ab$ ad medium proportionale inter $\overline{a+b+c}\times\overline{a+b-c}$, & $\overline{a-b+c}\times\overline{-a+b+c}$, ita radius ad sinum anguli A.

Insuper in AB Cape $AE=AC$, & Age CE, & erit angulus ECD æqualis dimidio anguli A. Aufer AD de AE, & restabit $DE=b-\frac{1}{2}a-\frac{bb+cc}{2a}=\frac{cc-aa+2ab-bb}{2a}=\frac{\overline{c+a-b}\times\overline{c-a+b}}{2a}$. Unde $DEq=\frac{\overline{c+a-b}\times\overline{c+a-b}\times\overline{c-a+b}\times\overline{c-a+b}}{4aa}$. Et hinc consit *Theorema tertium quartumque, viz.*

III. Ut $2ab$ ad $\overline{c+a-b}\times\overline{c-a+b}$ (ita AC ad DE) ita radius ad sinum versum anguli A.

IV. Et, ut medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$ (ita CD ad DE)

ita radius ad tangentem dimidii anguli A, vel dimidii cotangens ad radium.

Præterea est $CEq = CDq + DEq = \frac{2abb + bcc - baa - b^3}{a}$

$= \frac{b}{a} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}$. Unde *Theorema quintum & sextum.*

V. Ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$, vel ut 1 ad medi. proportionale inter $\frac{c+a-b}{2a}$, & $\frac{c-a+b}{2b}$ (ita AC ad ½CE vel CE ad DE) ita radius ad sinum dimidii anguli A.

VI. Et ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ (ita CE ad CD) ita radius ad cosinum dimidii anguli A.

Si præter angulos desideretur etiam area trianguli, duc CDq in $\frac{1}{4}ABq$, & radix *viz.* $\frac{1}{4}\sqrt{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}}$, erit area illa quæsita.

PROB. XII.

Trianguli cujusvis rectilinei datis lateribus & basi, invenire segmenta basis, perpendiculum, aream & angulos.

Tab. II. Fig. 8. Trianguli ABC dentur latera AC, BC & basis AB. Biseca AB in I & in ea utrinque producta cape AF & AE æquales AC, atque BG & BH æquales BC. Junge CE, CF; & à C ad basem demitte perpendiculum CD. Et erit $ACq - BCq = ADq + CDq - CDq - BDq = ADq - BDq = \overline{AD+BD} \times \overline{AD-BD} = AB \times 2DI$. Ergo $\frac{ACq - BCq}{2AB} = DI$. Et $2AB . AC+BC :: AC-BC . DI$. Quod est Theorema pro determinandis segmentis basis.

De IE, hoc est de $AC - \frac{1}{2}AB$ aufer DI, & restabit

ſtabit $DE = \frac{BCq - ACq + 2AC \times AB - ABq}{2AB}$, hoc eſt $= \frac{\overline{BC+AC-AB} \times \overline{BC-AC+AB}}{2AB}$, ſive $= \frac{HE \times EG}{2AB}$. Aufer DE de FE ſive 2AC, & reſtabit $FD = \frac{ACq + 2AC \times AB + ABq - BCq}{2AB}$, hoc eſt $= \frac{\overline{AC+AB+BC} \times \overline{AC+AB-BC}}{2AB}$, ſive $= \frac{FG \times FH}{2AB}$. Et cum ſit CD medium proportionale inter DE ac DF, CE medium proportionale inter DE & EF, ac CF medium proportionale inter DF & EF: erit $CD = \frac{\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}}{2AB}$, $CE = \sqrt{\frac{AC \times HE \times EG}{AB}}$, & $CF = \sqrt{\frac{AC \times FG \times FH}{AB}}$. Duc CD in $\frac{1}{2}AB$ & habebitur area $= \frac{1}{4}\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$. Pro angulo vero A determinando prodeunt Theoremata multiplicia, *viz.*

1. $2AB \times AC : HE \times EG$ (:: AC. DE) :: radius ad ſinum verſum anguli A.

2. $2AB \times AC.\ FG \times FH$ (:: AC. FD) :: radius ad coſin. verſ. A.

3. $2AB \times AC.\ \sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$ (:: AC. CD) :: rad. ad ſin. A.

4. $\sqrt{FG \times FH}.\ \sqrt{HE \times EG}$ (:: CF. CE) :: rad. ad tang. $\frac{1}{2}$ A.

5. $\sqrt{HE \times EG}.\ \sqrt{FG \times FH}$ (:: CE. FC) :: rad. ad cotang. $\frac{1}{2}$ A.

6. $2\sqrt{AB \times AC}.\ \sqrt{HE \times EG}$ (:: FE. CE) :: rad. ad ſin. $\frac{1}{2}$ A.

7. $2\sqrt{AB \times AC}.\ \sqrt{FG \times FH}$ (:: FE. FC) :: rad. ad coſin. $\frac{1}{2}$ A.

PROB. XIII.

Tab. II. Fig. 9. *Datum angulum CBD recta data CD subtendere; ita ut si à termino istius rectæ D ad punctum A in recta CB producta datum agatur AD, fuerit angulus ADC æqualis angulo ABD.*

Dicatur $CD=a$, $AB=b$, $BD=x$, & erit $BD.BA::CD.DA=\frac{ab}{x}$. Demitte perpendiculum DE, Erit $BE=\frac{BDq-ADq+BAq}{2BA}$ $=\frac{xx-\frac{aabb}{xx}+bb}{2b}$. Ob datum angulum DBA pone $BD.BE::b.e$, & habebitur iterum $BE=\frac{ex}{b}$, ergo $xx-\frac{aabb}{xx}+bb=2ex$. Et $x^4-2ex^3+bbxx-aabb=0$.

PROB. XIV.

Tab. II. Fig. 10. *Invenire Triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC & perpendiculum DC, sunt in Arithmetica progressione.*

Dic $AC=a$, $BC=x$; & erunt $DC=2x-a$, & $AB=2a-x$. Erunt etiam $AD\ (=\sqrt{ACq-DCq})=\sqrt{4ax-4xx}$ & $BD\ (=\sqrt{BCq-DCq})=\sqrt{4ax-3xx-aa}$. Atque adeo rursus $AB=\sqrt{4ax-4xx}+\sqrt{4ax-3xx-aa}$. Quare $2a-x=\sqrt{4ax-4xx}+\sqrt{4ax-3xx-aa}$, sive $2a-x-\sqrt{4ax-4xx}=\sqrt{4ax-3xx-aa}$. Et partibus quadratis $4aa-3xx-\overline{4a+2x}\times\sqrt{4ax-4xx}=4ax-3xx-aa$, sive $5aa-4ax=\overline{4a-2x}\sqrt{4ax-4xx}$. Et partibus iterum quadratis ac terminis rite dispositis $16x^4-80ax^3+144aaxx-104a^3x+25a^4=0$. Hanc æquationem

tionem divide per $2x-a$, & orietur $8x^3-36axx+54aax-25a^3=0$, æquatio cujus resolutione dabitur x ex assumpto utcunque a. Habitis a & x constitue triangulum cujus latera erunt $2a-x$, a, & x; & perpendiculum in latus $2a-x$ demissum erit $2x-a$.

Si posuissem differentiam laterum trianguli esse d, & perpendiculum esse x; opus evasisset aliquanto concinnius, prodeunte tandem æquatione $x^3=24ddx+48d^3$.

PROB. XV.

Invenire Triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC, & perpendiculum CD, sunt in Geometrica progressione. Tab. II. Fig. 10.

Dic $AC=x$, & $BC=a$; & erit $AB=\frac{xx}{a}$. Et $CD=\frac{aa}{x}$. Est & AD $(=\sqrt{ACq-CDq})=\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}$; & BD $(=\sqrt{BCq-DCq})$ $=\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}$; adeoque $\frac{xx}{a}$ $(=AB)=\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}+\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}$, sive $\frac{xx}{a}-\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}=\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}$. Et partibus æquationis quadratis, $\frac{x^4}{aa}-\frac{2xx}{a}\times\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}+aa-\frac{a^4}{xx}=xx-\frac{a^4}{xx}$, hoc est $x^4-aaxx+a^4=2aax\sqrt{xx-aa}$. Et partibus iterum quadratis $x^8-2aax^6+3a^4x^4-2a^6xx+a^8=4a^4x^4-4a^6xx$. Hoc est $x^8-2aax^6-a^4x^4+2a^6xx+a^8=0$. Divide hanc æquationem per $x^4-aaxx-a^4$, & orietur $x^4-aaxx-a^4$. Quare est $x^4=aaxx+a^4$. Et extracta radice $xx=\frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{5}{4}a^4}$, sive $x=a\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}$. Cape ergo a sive BC cujusvis longitudinis, & fac $BC.AC::AC.AB::1.\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}$; & trianguli ABC ex his lateribus constituti perpendiculum DC erit ad latus BC in eadem ratione.

Idem aliter.

TAB. II. Fig. 11. Cum sit AB. AC :: BC. DC dico angulum ACB rectum esse. Nam si negas age CE constituentem angulum ECB rectum Sunt ergo triangula BCE, DBC similia per 8. VI. Elem. adeoque EB. EC :: BC. DC. hoc est EB. EC :: AB. AC. Age AF perpendicularem CE & propter parallelas AF, BC, erit EB. EC :: AE. FE :: AB. FC. Ergo per 9. V. Elem. est AC $=$ FC, hoc est Hypotenusa trianguli rectanguli æqualis lateri contra 19. I. Elem. Non est ergo angulus ECB rectus, & proinde ipsum ACB rectum esse oportet. Est itaque $ACq + BCq = ABq$. Sed est $ACq = AB \times BC$, ergo $AB \times BC + BCq = ABq$, & extracta radice $AB = \frac{1}{2}BC + \sqrt{\frac{5}{4}BCq}$. Quamobrem cape BC. AB :: 1. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, & AC mediam proportionalem inter BC & AB, & triangulo ex his lateribus constituto, erunt AB. AC. BC. DC continue proportionales.

PROB. XVI.

TAB. II. Fig. 12. *Super data basi AB triangulum ABC constituere, cujus vertex C erit ad rectum EC positione datam, basis autem medium existet Arithmeticum inter latera.*

Basis AB bisecetur in F, & producatur donec rectæ EC positione datæ occurrat in E, & ad ipsam demittatur perpendicularis CD; dictisque $AB = a$, $FE = b$, & $BC - AB = x$, erit $BC = a + x$, $AC = a - x$. Et per 13. II. Elem. BD. $\left(= \frac{BCq - ACq + ABq}{2AB}\right) = 2x + \frac{1}{2}a$. Adeoque $FD = 2x$, $DE = b + 2x$, & CD $\left(= \sqrt{CBq - BDq}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Sed propter datas positiones rectarum CE & AB, datur angulus CED; adeoque & ratio DE ad CD; quæ si ponatur d ad e dabit analogiam $d. e :: b + 2x. \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Unde, multiplicatis extremis & mediis in se, oritur

tur æquatio $eb+2ex=d\sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$, cujus partibus quadratis & rite dispositis, fit $xx=\frac{\frac{3}{4}ddaa-eebb-4eebx}{4ee+3dd}$. Et radice extracta $x=\frac{-2eeb+d\sqrt{3eeaa-3eebb+\frac{9}{4}ddaa}}{4ee+3dd}$. Dato autem x, datur $BC=a+x$ & $AC=a-x$.

PROB. XVII.

Datis Parallelogrammi cujuscunque lateribus AB, BD, DC & AC, & una linea diagonali BC, invenire alteram diagonalem AD. TAB. II. Fig. 13.

Sit E concursus diagonalium, & ad diagonalem BC demitte normalem AF, & per 13. II. Elementorum erit $\frac{ACq-ABq+BCq}{2BC}=CF$, atque etiam $\frac{ACq-AEq+ECq}{2EC}=CF$. Quare cum sit $EC=\frac{1}{2}BC$, & $AE=\frac{1}{2}AD$, erit $\frac{ACq-ABq+BCq}{2BC}=\frac{ACq-\frac{1}{4}ADq+\frac{1}{4}BCq}{BC}$, & facta reductione $AD=\sqrt{2ACq+2ABq-BCq}$.

Unde obiter in quolibet parallelogrammo, summa quadratorum laterum æquatur summæ quadratorum diagonalium.

PROB. XVIII.

Datis Trapezii ABCD angulis, perimetro, & area, determinare latera. TAB. II. Fig. 14.

Latera duo quælibet AB ac DC produc donec concurrant in E, sitque $AB=x$ & $BC=y$ & propter angulos omnes datos dantur rationes BC ad CE & BE; quas pone d ad e & f; & erit $CE=\frac{ey}{d}$ & $BE=\frac{fy}{d}$ adeoque $AE=x+\frac{fy}{d}$. Dantur etiam ratio-

rationes AE ad AD ac DE; quas pone g & h ad d; & erit $AD = \frac{dx+fy}{g}$ & $ED = \frac{dx+fy}{h}$, adeoque $CD = \frac{dx+fy}{h} - \frac{ey}{d}$, & summa omnium laterum $x+y+\frac{dx+fy}{g}+\frac{dx+fy}{h}-\frac{ey}{d}$; quæ, cum detur, esto a, & abbrevientur etiam termini scribendo $\frac{p}{r}$ pro dato $1+\frac{d}{g}+\frac{d}{h}$, & $\frac{q}{r}$ pro dato $1+\frac{f}{g}+\frac{f}{h}-\frac{e}{d}$, habebitur æquatio $\frac{px+qy}{r} = a$.

Adhæc propter datos omnes angulos datur ratio BCq ad triangulum BCE, quam pone m ad n & erit triang. $BCE = \frac{n}{m}yy$. Datur etiam ratio AEq ad triangulum ADE; quam pone m ad d; & erit triang. $ADE = \frac{ddxx+2dfxy+ffyy}{dm}$. Quare cum area AC, quæ est horum triangulorum differentia, detur, esto bb & erit $\frac{ddxx+2dfxy+ffyy-dnyy}{dm} = bb$. Atque ita habentur duæ æquationes ex quarum reductione omnia determinantur. Nempe superior æquatio dat $\frac{ra-qy}{p} = x$, scribendo $\frac{ra-qy}{p}$ pro x in inferiori, provenit $\frac{drraa-2dqray+dqqyy}{ppm}+\frac{2afry-2fqyy}{pm}+\frac{ffyy-dnyy}{dm} = bb$. Et abbreviatis terminis scribendo s pro dato $\frac{dqq}{pp}-\frac{2fq}{p}+\frac{ff}{d}-n$, & st pro dato $+\frac{adqr}{pp}-\frac{afr}{p}$, ac stv pro dato $bbm-\frac{drraa}{pp}$, oritur $yy = 2ty+tv$ seu $y = t+\sqrt{tt+tv}$.

PROB.

PROB. XIX.

Piscinam ABCD perambulatorio ABCDEFGH datæ areæ, & ejusdem ubique latitudinis circundare.

TAB. II. Fig. 15.

Esto perambulatorii latitudo x & ejus area aa. Et à punctis A, B, C, D, ad lineas EF, FG, GH & HE demissis perpendicularibus AK, BL, BM, CN, CO, DP, DQ, AI, perambulatorium dividetur in quatuor trapezia IK, LM, NO, PQ & in quatuor parallelogramma AL, BN, CP, DI, latitudinis x, & ejusdem longitudinis cum lateribus dati trapezii. Sit ergo summa laterum (AB+BC+CD+DA) $= b$, & erit summa parallelogrammorum $= bx$.

Porro ductis AE, BF, CG, DH; cum sit AI $=$ AK erit ang. AEI $=$ ang. AEK $=$ ½IEK sive ½DAB. Datur ergo ang. AEI & proinde ratio ipsius AI ad IE, quam pone d ad e; & erit IE $= \frac{ex}{d}$. Hanc duc in ½AI sive ½x & fiet area trianguli AEI $= \frac{exx}{2d}$. Sed propter æquales angulos & latera, triangula AEI & AEK sunt æqualia, adeoque trapezium IK ($=$ 2 triang. AEI) $= \frac{exx}{d}$. Simili modo ponendo BL. LF :: $d.f$, & CN. NG :: $d.g$, & DP. PH :: $d.b$, (nam illæ etiam rationes dantur ex datis angulis B, C, ac D) habebitur trapezium LM $= \frac{fxx}{d}$, NO $= \frac{gxx}{d}$, & PQ $= \frac{bxx}{d}$. Quamobrem $\frac{exx}{d} + \frac{fxx}{d} + \frac{gxx}{d} + \frac{bxx}{d}$ sive $\frac{pxx}{d}$ scribendo p pro $e+f+g+b$, erit æquale trapeziis quatuor IK+LM+NO+PQ; & proinde $\frac{pxx}{d} + bx$, æquabitur toti perambulatorio aa. Quæ æquatio dividendo omnes terminos per $\frac{p}{d}$ & extra-

P hendo

hendo radicem ejus, evadet $x = \frac{-db + \sqrt{bbdd + 4aapd}}{2p}$. Latitudine Perambulatorii ſic inventa facile eſt ipſum deſcribere.

PROB. XX.

Tab. III. Fig. 1.

A dato puncto C rectam lineam CF ducere quæ cum aliis duabus poſitione datis rectis AE & AF triangulum datæ magnitudinis AEF comprehendet.

Age CD parallelam AE, & CB ac EG perpendiculares in AF, ſitque $AD = a$, $CB = b$, $AF = x$, & trianguli AEF area cc, & propter proportionales DF. AF (:: DC. AE) :: CB. EG, hoc eſt $a+x . x :: b . \frac{bx}{a+x}$ erit $\frac{bx}{a+x} = EG$. Hanc duc in $\frac{1}{2}AF$, & emerget $\frac{bxx}{2a+2x}$ quantitas areæ AEF quæ proinde æquatur cc. Atque adeo æquatione ordinata eſt $xx = \frac{2ccx + 2cca}{b}$ ſeu $x = \frac{cc + \sqrt{c^4 + 2ccab}}{b}$.

Nihil ſecus recta per datum punctum ducitur quæ triangulum vel trapezium quodvis in data ratione ſecabit.

PROB. XXI.

Tab. III. Fig. 2 vide prop. 45.

Punctum C in data recta linea DF determinare, a quo ad alia duo poſitione data puncta A & B ductæ rectæ AC & BC datam habeant differentiam.

A datis punctis ad datam rectam demitte perpendiculares AD & BF, & dic $AD = a$, $BF = b$, $DF = c$, $DC = x$, & erit $AC = \sqrt{aa+xx}$, $FC = x - c$, & $BC = \sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$.

Sit

Sit jam data harum differentia d; existente AC majori quam BC erit $\sqrt{aa+xx} - d = \sqrt{bb+xx-2cx+cc}$. Et quadratis partibus $aa+xx+dd-2d\sqrt{aa+xx} = bb+xx-2cx+cc$. Factaque reductione & abbreviandi causa pro datis $aa+dd-bb-cc$ scripto $2ee$, emerget $ee+cx = d\sqrt{aa+xx}$. Iterumque quadratis partibus $e^4+2ceex+ccxx = ddaa+ddxx$.

Et æquatione reducta $xx = \frac{2eecx+e^4-aadd}{dd-cc}$, seu $x = \frac{eec+\sqrt{e^4dd-aad^4+aaddcc}}{dd-cc}$.

Haud secus problema resolvitur si linearum AC & BC summa, vel quadratorum summa aut differentia, vel proportio, vel rectangulum, vel angulus ab ipsis comprehensus, detur; vel etiam si vice rectæ DC, circumferentia circuli, aut alia quævis curva linea adhibeatur, modo calculus (in hoc ultimo præsertim casu) referatur ad lineam conjungentem puncta A & B.

PROB. XXII.

Datis positione tribus rectis AD, AE, BF, quartam DF ducere, cujus partes DE EF prioribus interceptæ, datarum erunt longitudinum. TAB. III. Fig. 3.

Ad BF demitte perpendicularem EG, ut & obliquam EC parallelam AD, & rectis tribus positione datis concurrentibus in A, B, & H, dic $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$, $ED = d$, $EF = e$, & $HE = x$. Jam propter similia triangula ABH, ECH, est AH. AB::HE. EC $= \frac{ax}{c}$, & AH. HB::HE. CH $= \frac{bx}{c}$. Adde HB, & fit CB $= \frac{bx+bc}{c}$. Insuper propter similia triangula FEC, FDB, est ED. CB::EF. CF $= \frac{ebx+ebc}{dc}$. Deni-

quæ per 12 & 13. II. Elem. est $\frac{ECq - EFq}{2FC} + \frac{1}{2}FC (= CG) = \frac{HEq - ECq}{2CH}$ $- \frac{1}{2}CH$, hoc est $\frac{\frac{aaxx}{cc} - ee}{\frac{2ebx + 2ebc}{dc}} + \frac{ebx + ebc}{2dc} = \frac{xx - \frac{aaxx}{cc}}{\frac{2bx}{e}} - \frac{bx}{2c}$. Sive $\frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc} + \frac{ebx}{d} + \frac{ebc}{d} = \frac{ccx - aax - bbx}{b}$. Hic, abbreviandi causa, pro $\frac{cc - aa - bb}{b} - \frac{eb}{d}$, scribe m; & erit $\frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc}$ $+ \frac{ebc}{d} = mx$, ac terminis omnibus multiplicatis per $x + c$, fiet $\frac{aadxx - eedcc}{eb} + \frac{ebcx}{d} + \frac{ebcc}{d} = mxx + mcx$. Iterum pro $\frac{aad}{eb} - m$, scribe p, pro $mc - \frac{ebc}{d}$ scribe $2pq$, & pro $-\frac{ebcc}{d} + \frac{eedcc}{eb}$ scribe prr, & evadet $xx = 2qx + rr$, & $x = q \pm \sqrt{qq + rr}$. Invento x sive HE, age EC parallelam AB, & cape FC. BC :: $e.d$, & acta FED conditionibus quæstionis satisfaciet.

PROB. XXIII.

TAB. III. Fig. 4.

Punctum Z determinare à quo ad quatuor positione datas rectas lineas FA, EB, FC, GD, si aliæ quatuor lineæ ZA, ZB, ZC, & ZD in datis angulis ducantur, duarum è ductis ZA & ZB rectangulum & aliarum duarum ZC & ZD summa detur.

E lineis elige aliquam positione datam FA ut & positione non datam ZA quæ ad illam ducitur, ex quarum longitudinibus punctum Z determinetur, & cæteras positione datas lineas produc donec his, si opus est etiam productis, occurrant, ut vides. Dictisque

que $EA = x$, & $AZ = y$, propter angulos trianguli AEH datos dabitur ratio AE ad AH quam pone p ad q, & erit $AH = \frac{qx}{p}$. Adde AZ, fitque $ZH = y + \frac{qx}{p}$. Et inde cum propter datos angulos trianguli HZB detur ratio HZ ad BZ si ea ponatur n ad p habebitur $ZB = \frac{py+qx}{n}$.

Praeterea si data EF dicatur a, erit $AF = a - x$, indeque, si propter datos angulos trianguli AFI statuatur AF ad AI in ratione p ad r, evadet $AI = \frac{ra - rx}{p}$. Hanc aufer ab AZ & restabit $IZ = y - \frac{ra - rx}{p}$. Et propter datos angulos trianguli ICZ, si ponatur IZ ad ZC in ratione m ad p, evadet $ZC = \frac{py - ra + rx}{m}$.

Ad eundem modum si ponatur $EG = b$. $AG.\ AK :: l : s$ & $ZK.\ ZD :: p.\ l.$ obtinebitur $ZD = \frac{sb - sx - ly}{p}$.

Jam ex statu quaestionis si duarum ZC & ZD summa $\frac{py - ra + rx}{m} + \frac{sb - sx - ly}{p}$ ponatur aequalis dato alicui f; & aliarum duarum rectangulum $\frac{pyy + qxy}{n}$ aequale gg, habebuntur duae aequationes pro determinandis x & y. Per posteriorem fit $x = \frac{ngg - pyy}{qy}$. & hunc ipsius x valorem scribendo pro eo in priori aequatione, evadet $\frac{py - ra}{m} + \frac{rngg - rpyy}{mqy} + \frac{sb - ly}{p} - \frac{sngg - spyy}{pqy} = f$. Et reducendo $yy = \frac{apqry - bmqsy + fmpqy + ggmns - ggnpr}{ppq - ppr - mlq + mps}$.

Et abbrevi. causa scripto $2h$ pro $\frac{apqr - bmqs + fmpq}{ppq - ppr - mlq + mps}$, & kk

P 3 pro

pro $\frac{ggmns - ggpnr}{ppq - ppr - mlq + mps}$ fiet $yy = 2by + kk$, sive $y = b \pm \sqrt{bb + kk}$. Cujus æquationis ope cum y innotescit, æquatio $\frac{ngg - pyy}{qy} = x$ dabit x. Quod sufficit ad determinandum punctum z.

Ad eundem fere modum punctum determinatur à quo ad plures vel pauciores positione datas rectas totidem aliæ rectæ ducantur ea lege ut aliquarum summa vel differentia vel contentum detur, aut æquetur cæterarum summæ vel differentiæ vel contento, vel ut alias quaslibet habeant assignatas conditiones.

PROB. XXIV.

Tab. III. Fig. 5.

Angulum rectum EAF data recta EF subtendere, quæ transibit per datum punctum C, a lineis rectum angulum comprehendentibus æquidistans.

Quadratum ABCD compleatur, & linea EF bisecetur in G. Tum dic CB vel CD esse a, EG vel FG esse b, & CG esse x; eritque CE $= x - b$, & CF $= x + b$. Dein cum CFq − BCq = BFq, erit BF $= \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Denique propter similia triangula CDE, FBC, est CE. CD::CF. BF, sive $x - b.\ a :: x + b.\ \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Unde $ax + ab = \overline{x - b} \times \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Cujus æquationis utraque parte quadrata, & prodeuntibus terminis in ordinem redactis, prodit $x^4 = \begin{matrix} 2aa \\ +2bb \end{matrix}\, xx \begin{matrix} +2aabb \\ -b^4 \end{matrix}$. Et extracta radice sicut fit in æquationibus quadraticis, prodit $xx = aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}$. Adeoque $x = \sqrt{aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}}$. CG sic inventa dat CE vel CF, quæ determinando punctum E vel F problemati satisfacit.

Idem

Idem aliter.

Sit $CE = x$, $CD = a$, & $EF = b$, eritque $CF = x + b$ & $BF = \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Et proinde cum sit $CE . CD :: CF . BF$, sive $x . a :: x + b . \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$, erit $ax + ab = x\sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Hujus æquationis partibus quadratis, & terminis in ordinem redactis prodibit $x^4 + 2bx^3 \begin{smallmatrix} + bb \\ - 2aa \end{smallmatrix} xx - 2aabx - aabb = 0$, æquatio biquadratica, cujus radicis investigatio difficilior est quam in priori casu. Sic autem investigari potest. Pone $x^4 + 2bx^3 \begin{smallmatrix} + bb \\ - 2aa \end{smallmatrix} xx - 2aabx + a^4 = aabb + a^4$, & extracta utrobique radice $xx + bx - aa = \pm a\sqrt{aa + bb}$.

Ex his occasionem nactus sum tradendi *Regulam de electione terminorum* ad incundum calculum.

Scilicet cum duorum terminorum talis obvenit affinitas sive similitudo relationis ad cæteros terminos quæstionis, ut oporteret æquationes per omnia similes ex utrovis adhibito produci, aut ambos si simul adhiberentur easdem in æquatione finali dimensiones & eandem omnino formam (signis forte + & − exceptis) habituros esse; (id quod facile prospicitur;) tunc neutrum adhibere convenit, sed eorum vice tertium quemvis eligere qui similem utrique relationem gerit, puta semisummam vel semidifferentiam, vel medium proportionale forsan, aut quamvis aliam quantitatem utrique indifferenter & sine compare relatam.

Sic in præcedente problemate cum viderim lineam EF pariter ad utramque AB & AD referri (quod patebit si ducas itidem EF in angulo BAH,) atque adeo nulla ratione suaderi possem cur ED potius quam BF, vel AE potius, quam AF vel CE potius quam CF pro quærenda quantitate adhiberentur; vice punctorum E & F unde hæc ambiguitas proficiscitur, sumpsi (in solutione priori) intermedium G quod parem relationem ad utramque linearum AB & AD observat. Deinde ab hoc G non demisi perpendiculum ad AF pro quærenda quantitate, quia potui eadem ratione demisisse ad AD. Et epropter in neutrum CB vel CD demisi, sed institui CG quæ-

quærendum esse quod nullum admittit compar; & sic æquationem biquadraticam obtinui sine terminis imparibus.

Potui etiam (animadverso quod punctum G jaceat in peripheria circuli centro A, radio EG descripti) demisisse GK perpendiculum in diagonalem AC, & quæsivisse AK vel CK, (quippe quæ similem etiam utrique AB & AD relationem gerunt;) atque ita in æquationem quadraticam $yy = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{4}bb$ incidissem posito AK y, AC $= e$, & EG $= b$. Et AK sic invento erigendum fuisset perpendiculum KG præfato circulo occurrens in G, per quod CF transiret.

Ad hanc regulam animum advertens, in Prob. 9. & 10. ubi trianguli latera germana BC & AC determinanda erant, quæsivi potius semidifferentiam quam alterutrum eorum. Sed regulæ hujus utilitas ex vigesimo octavo Problemate magis elucescet.

PROB. XXV.

TAB. III. Fig. 6.

Ad Circulum centro C radio CD descriptum ducere Tangentem DB, cujus pars PB, inter rectas positione datas AP, AB sita, sit datæ longitudinis.

A centro C ad alterutram rectarum positione datarum puta AB demitte normalem CE, eamque produc donec Tangenti DB occurrat in H. Ad eandem AB demitte etiam normalem PG; & dictis EA $= a$, EC b, CD $= c$, BP $= d$, & PG $= x$, propter similia triangula PGB, CDH erit GB $(\sqrt{dd-xx})$. PB :: CD. CH $= \frac{cd}{\sqrt{dd-xx}}$. Adde EC; & fiet EH $= b + \frac{cd}{\sqrt{dd-xx}}$. Porro est PG. GB :: EH. EB $= \frac{b}{x}\sqrt{dd-xx} + \frac{cd}{x}$. Adhæc propter angulum PAG datum datur ratio PG ad AG, qua posita e ad f erit AG $= \frac{fx}{e}$. Adde EA & BG, & habebitur denuo EB $= a + \frac{fx}{e}$

+

$+\sqrt{dd-xx}$. Est itaque $\frac{cd}{x}+\frac{b}{x}\sqrt{dd-xx}=a+\frac{fx}{e}+\sqrt{dd-xx}$, & per transpositionem terminorum $a+\frac{fx}{e}-\frac{cd}{x}=\frac{b-x}{x}\sqrt{dd-xx}$. Et partibus æquationis quadratis $aa+\frac{2afx}{e}-\frac{2acd}{x}+\frac{ffxx}{ee}-\frac{2cdf}{e}+\frac{ccdd}{xx}$ $=\frac{bbdd}{xx}-bb-\frac{2bdd}{x}+2bx+dd-xx$. Et per debitam reductionem

$$\frac{x^4 \begin{array}{l}+2aef\\-2bee\end{array} x^3 \begin{array}{l}+aaee\\+bbee\\-ddee\\-2cdef\end{array} xx \begin{array}{l}+2bddee\\-2acdee\end{array} x \begin{array}{l}+ccddee\\-bbddee\end{array}}{ee+ff}=0.$$

PROB. XXVI.

Invenire punctum D à quo tres rectæ DA, DB, DC ad totidem alias positione datas rectas AE, BF, CF perpendiculariter demissæ; datam inter se rationem obtineat. Tab. III. Fig. 7.

Erectis positione datis producatur una puta BF, ut & ejus perpendicularis BD donec reliquis AE & CF occurrant; BF quidem in E & F; BD autem in H & G. Jam sit $EB=x$ & $EF=a$; eritque $BF=a-x$. Cum autem propter datam positionem rectarum EF, EA, & FC, anguli E & F, adeoque rationes laterum triangulorum EBH & FBG dentur; sit EB ad BH ut d ad e; & erit $BH=\frac{ex}{d}$, & EH $(=\sqrt{EBq+BHq})=\sqrt{xx+\frac{eexx}{dd}}$, hoc est $=\frac{x}{d}\sqrt{dd+ee}$. Sit etiam BF ad BG ut d ad f; & erit $BG=\frac{fa-fx}{d}$ & FG $(=\sqrt{BFq+BGq})$ $=\sqrt{aa-2ax+xx+\frac{ffaa-2ffax+ffxx}{dd}}$, hoc est $=\frac{a-x}{d}$

Q √

$\sqrt{dd+ff}$. Præterea dicatur BD $=y$, & erit HD $=\frac{ex}{d}-y$, & GD $=\frac{fa-fx}{d}-y$, adeoque cum sit AD. HD (:: EB.EH) :: $d.\sqrt{dd+ee}$, & DC. GD (:: BF. FG) :: $d.\sqrt{dd+ff}$, erit AD $=\frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, & DC $=\frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$. Denique ob datas rationes linearum BD, AD, DC, fit BD. AD :: $\sqrt{dd+ee}.\ b-d$, & erit $\frac{by-dy}{\sqrt{dd+ee}}$ ($=$AD) $=\frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, sive $by=ex$. Sit etiam BD.DC :: $\sqrt{dd+ff}.\ k-d$ & erit $\frac{ky-dy}{\sqrt{dd+ff}}$ ($=$DC) $=\frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$, sive $ky=fa-fx$. Est itaque $\frac{ex}{b}$ $(=y)=\frac{fa-fx}{k}$; & per reductionem $\frac{fba}{ek+fb}=x$. Quare cape EB. EF :: $b.\frac{ek}{f}+b$, dein BD. EB :: $e.b$, & habebitur punctum quæsitum D.

PROB. XXVII.

TAB. III. Fig. 8.

Invenire punctum D, à quo tres rectæ DA, DB, DC ad data tria puncta A, B, C, ductæ, datam inter se rationem obtineant.

E datis tribus punctis junge duo quævis puta A & C; & à tertio B ad lineam conjungentem AC demitte perpendiculum BE, ut & perpendiculum DF à puncto quæsito D dictisque AE $=a$, AC $=b$, EB $=c$, AF $=x$, & FD $=y$, erit AD$q=xx+yy$. FC $=b-x$. CDq ($=$FC$q+$FDq) $=bb-2bx+xx+yy$. EF $=x-a$, ac BDq ($=$EF$q+\overline{\text{EB}+\text{FD}}$ quad.) $=xx-2ax+aa+cc+2cy+yy$. Jam cum sit AD ac CD in data ratione, sit ista ratio d ad e; & erit CD $=\frac{e}{d}\sqrt{xx+yy}$. Cum etiam sit AD ad BD in data ratione,

fit

sit ista ratio d ad f, & erit $BD = \frac{f}{d}\sqrt{xx+yy}$. Adeoque est $\frac{eexx+eeyy}{dd}$ $(=CDq) = bb - 2bx + xx + yy$, & $\frac{ffxx+ffyy}{dd}$ $(=BDq) = xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. In quibus si, abbreviandi causa, pro $\frac{dd-ee}{d}$ scribatur p, & q pro $\frac{dd-ff}{d}$, emerget $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, & $aa + cc - 2ax + 2cy + \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy = 0$. Per priorem est $\frac{2bqx-bbq}{p} = \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$. Quare in posteriori pro $\frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$ scribe $\frac{2bqx-bbq}{p}$, & orietur $\frac{2bqx-bbq}{p} + aa + cc - 2ax + 2cy = 0$. Iterum, abbreviandi causa, scribe m pro $a - \frac{bq}{p}$, & $2cn$ pro $\frac{bbq}{p} - aa - cc$, & erit $2mx + 2cn = 2cy$; terminisque per $2c$ divisis $\frac{mx}{c} + n = y$. Quamobrem in aequatione $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, pro yy scribe quadratum de $\frac{mx}{c} + n$, & habebitur $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{pmm}{dcc}xx + \frac{2pmn}{dc}x + \frac{pnn}{d} = 0$. Ubi denuo si, abbreviandi causa, $\frac{b}{r}$ scribatur pro $\frac{p}{d} + \frac{pmm}{dcc}$, $\frac{sb}{r}$ pro $b - \frac{pmn}{dc}$, & $\frac{tbb}{r}$ pro $bb + \frac{pnn}{d}$, habebitur $xx = 2sx - tb$. Et extracta radice $x = s \pm \sqrt{ss - tb}$. Invento x aequatio $\frac{mx}{c} + n = y$, dabit y; & ex datis x & y, hoc est AF & FD determinatur punctum quaesitum D.

PROB. XXVIII.

TAB. III. Fig. 9. ***Rectam DC datæ longitudinis in datam Conicam sectionem DAC sic inscribere ut ea per punctum G positione datum transeat.***

Sit AF axis Curvæ, & à punctis D, G & C ad hunc demitte normales DH, GE, & CB. Jam, ad determinandam positionem rectæ DC, puncti D aut C inventio proponi potest; sed cum hæc sint germana, & adeo paria ut ad alterutrum determinandum operatio similis evasura esset, sive quærerem CG, CB, aut AB; sive comparia DG, DH, aut AH; ea propter de tertio aliquo puncto prospicio quod utrumque D & C similiter respectet, & una determinet. Et hujusmodi video esse punctum F.

Jam sit $AE=a$, $EG=b$, $DC=c$, $EF=z$; & præterea cum relatio inter AB & BC habeatur in æquatione quam suppono pro Conica sectione determinanda datam esse, sit $AB=x$, & $BC=y$, & erit $FB=x-a+z$. Et propter GE. EF :: CB. FB erit iterum $FB=\frac{yz}{b}$. Ergo $x-a+z=\frac{yz}{b}$.

His ita præparatis tolle x per æquationem quæ curvam designat. Quemadmodum si Curva sit Parabola per æquationem $rx=yy$ designata, scribe $\frac{yy}{r}$ pro x; & orietur $\frac{yy}{r}-a+z=\frac{yz}{b}$. Et extracta radice, $y=\frac{rz}{2b}\pm\sqrt{\frac{rrzz}{4bb}+ar-rz}$. Unde patet $\sqrt{\frac{rrzz}{bb}+4ar-4rz}$ esse differentiam gemini valoris y, id est linearum $+BC$ & $-DH$, adeoque (demisso DK in CB normali) valere CK. Est autem FG. GE :: DC. CK, hoc est $\sqrt{bb+zz}.\ b :: c.\ \sqrt{\frac{rrzz}{bb}+4ar-4rz}$. Ducendoque quadrata extremorum & mediorum in invicem, & facta ordinando orietur $z^4=\frac{4bbrz^3\begin{array}{l}-4abbr\\-bbrr\end{array}zz+4b^4rz\begin{array}{l}-4ab^4r\\+b^4cc\end{array}}{rr}$,

æqua-

æquatio quatuor tantum dimensionum, quæ ad octo dimensiones ascendisset si quæsivissem CG vel CB aut AB.

PROB. XXIX.

Datum angulum per datum numerum multiplicare vel dividere.

In angulo quovis FAG inscribe lineas AB, BC, CD, DE, &c. ejusdem cujusvis longitudinis, & erunt triangula ABC, BCD, CDE, DEF, &c. Isoscelia; adeoque per 32. I. Elem. erit ang. CBD = ang. A + ACB = 2 ang. A, & ang. DCE = ang. A + ADC = 3 ang. A, & ang. EDF = A + AED = 4 ang. A, & ang. FEG = 5 ang. A, & sic deinceps. Positis jam AB, BC, CD, &c. radiis æqualium circulorum, perpendicula BK, CL, DM, &c. demissa in AC, BD, CE, &c. erunt sinus istorum angulorum, & AK, BL, CM, DN, &c. sinus complementorum ad rectum. Vel posita AB diametro illæ AK, BL, CM, &c. erunt chordæ. Sit ergo AB = $2r$ & AK = x, dein sic operare. Tab. III. Fig. 10.

AB . AK : : AC . AL.

$$2r \; . \; x \; : : \; 2x \; . \; \frac{xx}{r}.$$

$$\left.\begin{array}{l} AL - AB \\ \text{Et } \frac{xx}{r} - 2r \end{array}\right\} = BL, \text{ Duplicatio.}$$

AB . AK : : AD (2AL — AB) . AM.

$$2r \; . \; x \; : : \; \frac{2xx}{r} - 2r \; . \; \frac{x^3}{rr} - x.$$

$$\left.\begin{array}{l} AM - AC \\ \text{Et } \frac{x^3}{rr} - 3x \end{array}\right\} = CM, \text{ Triplicatio.}$$

AB . AK : : AE (2AM — AC) . AN.

$$2r \; . \; x \; : : \; \frac{2x^3}{rr} - 4x \; . \; \frac{x^4}{r^3} - \frac{2xx}{r}.$$

$$\left.\begin{array}{l} AN - AD \\ \text{Et } \frac{x^4}{r^3} - \frac{4xx}{r} + 2r \end{array}\right\} = DN, \text{ Quadruplicatio.}$$

$$AB.AK::AF(2AN-AD).AO.$$

$$2r\,.\,x::\frac{2x^4}{r^3}-\frac{6xx}{r}+2r.\frac{x^5}{r^4}-\frac{3x^3}{r}+x.$$

$$\left.\begin{matrix}AO-AE\\ \text{Et }\frac{x^5}{r^4}-\frac{5x^3}{rr}+5x\end{matrix}\right\}=EO\text{, Quintuplicatio.}$$

Et sic deinceps. Quod si velis angulum in aliquot partes dividere, pone q pro BL, CM, DN, *&c.* Et habebis $xx-2rr=qr$ ad bisectionem, $x^3-3rrx=qrr$ ad trisectionem, $x^4-4rrxx+2r^4=qr^3$ ad quadrisectionem, $x^5-5rrx^3+5r^4x=qr^4$ ad quinquisectionem *&c.*

PROB. XXX.

TAB. III. Fig. 11.

Cometæ in linea recta BD uniformiter progredientis positionem cursus ex tribus observationibus determinare.

Sit A oculus spectatoris, B locus Cometæ in prima observatione, C in secunda ac D in tertia; quærenda erit inclinatio lineæ BD ad lineam AB. Ex observationibus itaque dantur anguli BAC BAD; adeoque si BH ducatur ad AB normalis & occurrens AC & AD in E & F, ex assumto utcunque AB dabuntur BE & BF, tangentes nempe præfatorum angulorum respectu radii AB. Sit ergo $AB=a$, $BE=b$, & $BF=c$. Porro ex datis observationum intervallis dabitur ratio BC ad BD, quæ si ponatur b ad e, & agatur DG parallela AC, cum sit BE ad BG in eadem ratione, & BE dicta fuerit b erit $BG=e$, adeoque $GF=e-c$. Adhæc si demittatur DH normalis ad BG, propter triangula ABF & DHF similia & similiter secta lineis AE ac DG, erit FE. AB::FG. HD, hoc est $c-b.a::e-c.\frac{ae-ac}{c-b}=HD$. Erit etiam FE. FB::FG.FH, hoc est $c-b.\ c::e-c.\ \frac{ce-cc}{c-b}=FH$; cui ad-

de

de BF sive c & sit $BH = \frac{ce - cb}{c - b}$. Quare est $\frac{ce - cb}{c - b}$ ad $\frac{ae - ac}{c - b}$, (sive $ce - cb$ ad $ae - ac$, vel $\frac{ce - cb}{e - c}$ ad a) ut BH ad HD; hoc est ut tangens anguli HDB sive ABK ad radium. Quare cum a supponatur esse radius, erit $\frac{ce - cb}{e - c}$ tangens anguli ABK, adeoque facta resolutione erit ut $e - c$ ad $e - b$ (sive GF ad GE) ita c (sive tangens anguli BAF) ad tangentem anguli ABK.

Dic itaque ut tempus inter primam & secundam observationem, ad tempus inter primam ac tertiam, ita tangens anguli BAE, ad quartam proportionalem. Dein ut differentia inter illam quartam proportionalem & tangentem anguli BAF, ad differentiam inter eandem quartam proportionalem & tangentem anguli BAE, ita tangens anguli BAF, ad tangentem anguli ABK.

PROB. XXXI.

Radiis a puncto lucido ad sphaericam superficiem refringentem divergentibus, invenire concursus singulorum refractorum cum axe sphaerae per punctum illud lucidum transeunte.

Sit A punctum illud lucidum, & BV sphaera, cujus axis AD, Centrum C, & vertex V, sitque AB radius incidens & BD refractus ejus, ac demissis ad radios istos perpendicularibus CE & CF, ut & BG perpendiculari ad AD, actaque BC, dic $AC = a$, VC vel $BC = r$, $CG = x$, & $CD = z$, eritque $AG = a - x$, $BG = \sqrt{rr - xx}$, $AB = \sqrt{aa - 2ax + rr}$; & propter sim. tri. ABG & ACE, $CE = \frac{a\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}}$. Item $GD = z + x$, $BD = \sqrt{zz + 2zx + rr}$: & propter sim. tri. DBG ac DCF, $CF = \frac{z\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$. Praeterea cum ratio sinuum incidentiae & TAB. III. Fig. 12.

refractionis, adeoque CE ad CF detur, pone illam rationem esse a ad f, & erit $\frac{fa\sqrt{rr-xx}}{\sqrt{aa-2ax+rr}} = \frac{az\sqrt{rr-xx}}{\sqrt{zz+2zx+rr}}$, ac multiplicando in crucem, dividendoque per $a\sqrt{rr-xx}$, erit $f\sqrt{zz+2zx+rr} = z\sqrt{aa-2ax+rr}$, & quadrando, ac redigendo terminos in ordinem, $zz = \frac{2ffxz+ffrr}{aa-2ax+rr-ff}$. Denique pro dato $\frac{ff}{a}$ scribe p, & q pro dato $a+\frac{rr}{a}-p$, & erit $zz=\frac{2pxz+prr}{q-2x}$ ac $z=\frac{px+\sqrt{ppxx-2prrx+pqrr}}{q-2x}$. Inventum est itaque z; hoc est longitudo CD, adeoque punctum quæsitum D quo refractus BD concurrit cum axe. Q. E. F.

Posui hic incidentes radios divergentes esse, & in Medium densius incidere; sed mutatis mutandis Problema perinde resolvitur ubi convergunt, vel incidunt è densiori Medio in rarius.

PROB. XXXII.

Si Conus plano quolibet secetur, invenire figuram sectionis.

Tab. IV. Fig. 1. 2. Sit ABC conus circulari basi BC insistens; IEM ejus sectio quæsita; KILM alia quælibet sectio parallela basi, & occurrens priori sectioni in HI; & ABC tertia sectio perpendiculariter bisecans priores duas in EH & KL, & conum in triangulo ABC. Et producto EH donec occurrat ipsi AK in D, actisque EF ac DG parallelis KL & occurrentibus AB & AC in F ac G, dic $EF=a$, $DG=b$, $ED=c$, $EH=x$, & $HI=y$; & propter sim. tri. EHL, EDG, erit ED. DG :: EH. HL $=\frac{bx}{c}$. Dein propter sim. tri. DEF, DHK, erit DE. EF :: DH. ($c-x$ in Fig. 1, & $c+x$ in Fig. 2.) HK $=\frac{ac \mp ax}{c}$. Denique cum sectio KIL sit paral-

parallela basi adeoque circularis, erit $HK \times HL = HIq$, hoc est $\frac{ab}{c}x + \frac{-ab}{cc}xx = yy$, æquatio quæ exprimit relationem inter EH (x) & HI (y) hoc est inter axem & ordinatim applicatam sectionis EIM, quæ æquatio cum sit ad Ellipsin in Fig. 1, & ad Hyperbolam in Fig. 2. patet sectionem illam perinde Ellipticam vel Hyperbolicam esse.

Quod si ED nullibi occurrat AK, ipsi parallela existens, tunc erit $HK = EF$ (a), & inde $\frac{ab}{c}x$ ($HK \times HL$) $= yy$, æquatio ad Parabolam.

PROB. XXXIII.

Si recta XY circa axem AB, ad distantiam CD, in data inclinatione ad planum DCB convolvatur, & solidum PQRVTS ista convolutione generatum secetur plano quolibet INQLK; invenire figuram Sectionis. TAB. IV, Fig. 3.

Esto BHQ vel GHO inclinatio axis AB ad planum sectionis; & L quilibet concursus rectæ XY cum plano illo. Age DF parallelam AB, & ad AB, DF & HO demitte perpendiculares LG, LF, LM, ac junge FG & MG. Dictisque $CD = a$, $CH = b$, $HM = x$, & $ML = y$; & propter datum angulum GHO posito $MH.\ HG :: d.e$: erit $\frac{ex}{d} = GH$, & $b + \frac{ex}{d}$ GC vel FD. Adhæc propter angulum datum LDF (nempe inclinationem rectæ XY ad planum GCDF) posito $FD.\ FL :: g.h$, erit $\frac{bh}{g} + \frac{hex}{dg} = FL$, cujus quadrato adde FGq, (DCq seu aa) & emerget $GLq = aa + \frac{hhbb}{gg} + \frac{2hhbex}{dgg} + \frac{hheexx}{ddgg}$. Hinc aufer MGq ($HMq - HGq$ seu $xx - \frac{ee}{dd}xx$) & restabit

$\frac{aagg+bbbb}{gg}+\frac{2bbbe}{dgg}x+\frac{bbee-ddgg+eegg}{ddgg}xx\ (=MLq)=yy$: æquatio quæ exprimit relationem inter x & y, hoc est inter HM axem sectionis, & ML ordinatim applicatam. Et proinde cum in hac æquatione x & y ad duas tantum dimensiones ascendant, patet figuram INQLK esse conicam sectionem. Utpote si angulus MHG major sit angulo LDF, Ellipsis erit hæc figura; si minor, Hyperbola; si æqualis vel Parabola, vel (coincidentibus insuper punctis C & H) parallelogrammum.

PROB. XXXIV.

Tab. IV. Fig. 4. *Si ad AF erigatur perpendiculum AD datæ longitudinis, & normæ DEF crus unum ED continuo transeat per punctum D dum alterum crus EF æquale AD dilabatur super AF; invenire curvam HIC quam crus EF medio ejus puncto C describit.*

Sit EC vel CF $=a$, perpendiculum CB $=y$, AB $=x$, & propter similia triangula FBC, FEG, erit BF $(\sqrt{aa-yy}.)$ BC+CF $(y+a)::$ EF $(2a.)$ EG+GF (AG+GF) seu AF. Quare $\frac{2ay+2aa}{\sqrt{aa-yy}}(=AF=AB+BF)=x+\sqrt{aa-yy}$. Jam multiplicando per $\sqrt{aa-yy}$ fit $2ay+2aa=aa-yy+x\sqrt{aa-yy}$, seu $2ay+aa+yy=x\sqrt{aa-yy}$, & quadrando partes divisas per $\sqrt{a+y}$, ac ordinando prodit $y^3+3ayy\begin{matrix}+3aa\\+xx\end{matrix}y\begin{matrix}+a^3\\-axx\end{matrix}=0$.

Idem aliter.

Tab. IV. Fig. 5. In BC cape hinc inde BI, & CK æquales CF, & age KF, HI, HC, ac DF; quarum HC ac DF occurrant ipsis AF & IK in M & N, & in HC demitte normalem IL. Eritque angulus IK $=\frac{1}{2}$BCF $=\frac{1}{2}$EGF $=$ GFD $=$ AMH $=$ MHI $=$ CIL; adeoque

que triangula rectangula KBF, FBN, HLI & ILC similia. Dic ergo FC $=a$, HI $=x$, & IC $=y$; & erit BN $(2a-y.)$ BK (y) :: LC.LH :: CIq $(yy.)$ HIq $(xx.)$ adeoque $2axx-yxx=y^3$. Ex qua æquatione facile colligitur hanc curvam esse Cissoidem Veterum, ad circulum cujus centrum sit A ac radius AH pertinentem.

PROB. XXXV.

Si datæ longitudinis recta ED angulum datum EAD subtendens ita moveatur ut termini ejus D & E anguli istius latera AD & AE perpetim contingant; proponatur Curvam FCG determinare quam punctum quodvis C in recta ista ED datum describit. Tab. IV. Fig. 6.

A dato puncto C age CB parallelam EA; & dic AB $=x$, BC $=y$, CE $=a$ & CD $=b$, & propter similia triangula DCB, DEA erit EC.AB :: CD.BD. hoc est $a.x::b.BD=\frac{bx}{a}$. Præterea demisso perpendiculo CH, propter datum angulum DAE vel DBC, adeoque datam rationem laterum trianguli rectanguli BCH sit $a.e.$ :: BC.BH, & erit BH $=\frac{ey}{a}$. Aufer hanc de BD & restabit HD $=\frac{bx-ey}{a}$. Jam in triangulo BCH propter angulum rectum BHC est BCq $-$ BHq $=$ CHq, hoc est $yy-\frac{eeyy}{aa}=$ CHq. Similiter in triangulo CDH propter angulum CHD rectum, est CDq $-$ CHq $=$ HDq, hoc est $bb-yy+\frac{eeyy}{aa}$ $(=$ HD$q=\frac{bx-ey}{a}$ quadrato$)=\frac{bbxx-2bexy+eeyy}{aa}$.

Et per reductionem $yy=\frac{2be}{aa}xy+\frac{aabb-bbxx}{aa}$: Ubi cum incognitæ

cognitæ quantitates sint duarum tantum dimensionum; patet curvam esse Conicam sectionem. Præterea extracta radice fit $y = \frac{bex \pm b\sqrt{eexx - aaxx + a^4}}{aa}$. Ubi in termino radicali coefficiens ipsius xx est $ee - aa$. Atqui erat $a.e::$ BC.BH; & BC necessario major est linea quam BH, nempe Hypotenusa trianguli rectanguli major latere; ergo a major quam e, & $ee - aa$ negativa est quantitas, atque adeo curva erit Ellipsis.

PROB. XXXVI.

Tab. IV. Fig. 7. *Si norma EBD ita moveatur ut ejus crus unum EB continuo subtendat angulum rectum EAB, dum terminus alterius cruris BD describat curvam aliquam lineam FDG; invenire lineam istam FDG quam punctum D describit.*

A puncto D ad latus AC demitte perpendiculum DC; & dictis $AC = x$, & $DC = y$, atque $EB = a$ & $BD = b$; in triangulo BDC propter angulum rectum ad C, est $BCq = BDq - DCq = bb - yy$. Ergo $BC = \sqrt{bb - yy}$ & $AB = x - \sqrt{bb - yy}$. Præterea propter similia triangula BEA. DBC, est BD.DC:: EB.AB. hoc est $b.y::a.x - \sqrt{bb - yy}$. Quare $bx - b\sqrt{bb - yy} = ay$, sive $bx - ay = b\sqrt{bb - yy}$. Et partibus quadratis ac debite reductis $yy = \frac{2abxy + b^4 - bbxx}{aa + bb}$. Et extracta radice $y = \frac{abx \pm bb\sqrt{aa + bb - xx}}{aa + bb}$. Unde patet iterum Curvam esse Ellipsin.

Tab. IV. Fig. 8. Hæc ita se habent ubi anguli EBD & EAB recti sunt: Sed si anguli isti sunt alterius cujusvis magnitudinis, dummodo sint æquales, sic procedendum erit. Demittatur DC perpendicularis ad AC ut ante, & agatur DH constituens angulum DHA æqualem angulo HAE puta obtusum, dictisque $EB = a$, $BD = b$, $AH = x$, & $HD = y$, propter similia triangula EAB, BHD, erit BD. DH

DH::EB.AB. hoc est $b.y::a.AB = \frac{ay}{b}$. Aufer hanc de AH, & restabit $BH = x - \frac{ay}{b}$. Præterea in triangulo DHC propter omnes angulos datos, adeoque datam rationem laterum, assume DH ad HC in ratione quavis data, puta b ad e, & cum DH sit y, erit $HC \frac{ey}{b}$, & $HB \times HC = \frac{exy}{b} - \frac{aeyy}{bb}$. Denique per 12. II. Elem. in triangulo BHD est $BDq = BHq + DHq + 2BH \times HC$, hoc est $bb = xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} + yy + \frac{2exy}{b} - \frac{2aeyy}{bb}$. Et extracta radice $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{eeyy - bbyy + bbbb}}{b}$. Ubi cum b sit major e hoc est $ee - bb$ negativa quantitas, patet iterum curvam esse Ellipsin.

PROB. XXXVII.

In dato angulo PAB actis utcunque rectis BD, PD in data ratione hac semper lege, ut BD sit parallela AP, & PD terminetur ad punctum P in recta AP datum; invenire locum puncti D. TAB. IV. Fig. 9.

Age CD parallelam AB & DE perpendicularem AP; ac dic $AP = a$, $CP = x$, & $CD = y$, sitque BD ad PD in ratione d ad e, & erit AC vel $BD = a - x$, & $PD = \frac{ea - ex}{d}$. Sit insuper propter datum angulum DCE, ratio CD ad CE, d ad f, & erit $CE = \frac{fy}{d}$, & $EP = x - \frac{fy}{d}$. Atqui propter angulos ad E rectos est $CDq - CEq (= EDq) = PDq - EPq$, hoc

hoc est $yy - \frac{ffyy}{dd} = \frac{eeaa - 2eeax + eexx}{dd} - xx + \frac{2fxy}{d} - \frac{ffyy}{dd}$. Ac deletis utrobique $-\frac{ffyy}{dd}$, terminisque rite dispositis $yy = \frac{2fxy}{d} + \frac{eeaa - 2eeax + eexx - ddxx}{dd}$. Et extracta radice $y = \frac{fx}{d} \pm \frac{\sqrt{eeaa - 2eeax \begin{array}{l}+ee\\-dd\\+ff\end{array} xx}}{d}$. Ubi cum x & y in æquatione penultima non nisi ad duas dimensiones ascendant, locus puncti D erit Conica sectio, eaque Hyperbola Parabola vel Ellipsis prout $ee - dd + ff$, (coefficiens ipsius xx in æquatione posteriori,) sit majus, æquale, vel minus nihilo.

PROB. XXXVIII.

Tab. V. Fig. 1.

Rectis duabus VE & VC positione datis, & ab alia recta PE circa polum positione datum P vertente sectis utcunque in C & E; si recta intercepta CE dividatur in partes CD, DE rationem datam habentes, proponatur invenire locum puncti D.

Age VP, eique parallelas DA, EB occurrentes VC in A & B. Dic VP $= a$, VA $= x$, & AD $= y$, & cum detur ratio CD ad DE, vel converse ratio CD ad CE, hoc est ratio DA ad EB, sit ista ratio d ad e, & erit EB $= \frac{ey}{d}$. Præterea cum detur angulus EVB, adeoque ratio EB ad VB, sit ista ratio e ad f; & erit VB $= \frac{fy}{d}$. Denique propter similia triangula CEB, CDA, CPV, est EB . CB :: DA . CA :: VP . VC, & componendo EB + VP . CB + VC :: DA + VP . CA + VC. Hoc est

ey

$\frac{ey}{d}+a.\frac{fy}{d}::y+a.x$. Ductisque extremis & mediis in se $eyx+dax=$ $fyy+fay$. Ubi cum indefinitæ quantitates x & y non nisi ad duas dimensiones ascendant, sequitur curvam VD, in qua punctum D perpetim reperitur, esse conicam sectionem, eamque Hyperbolam; quia una ex indefinitis quantitatibus, nempe x est unius tantum dimensionis, & in termino exy multiplicatur per alteram indefinitam quantitatem y.

PROB. XXXIX.

Si rectæ duæ AC, BC à duobus positione datis punctis A & B in data quavis ratione ad tertium quodvis punctum C ducantur; invenire locum puncti concursus C. TAB. V. Fig. 2.

Junge AB; & ad hanc demitte normalem CD: dictisque AB$=a$, AD$=x$, DC$=y$: Erit AC$=\sqrt{xx+yy}$. BD$=a-x$ & BC $(=\sqrt{BDq+DCq})=\sqrt{xx-2ax+aa+yy}$. Jam cum detur ratio AC ad BC, sit ista d ad e; &, extremis & mediis in se ductis, erit $e\sqrt{xx+yy}=d\sqrt{xx-2ax+aa+yy}$. Et per reductionem $\sqrt{\frac{ddaa-2ddax}{ee-dd}-xx}=y$. Ubi cum xx sit negativum, & sola unitate affectum; atque etiam angulus ADC rectus, patet curvam in qua punctum C locatur esse circulum. Nempe in recta AB cape puncta E & F ita ut sint $d.e$::AE.BE::AF.BF, & erit EF circuli hujus diameter.

Et hinc è converso patet hoc Theorema, quod in circuli cujusvis diametro EF infinite producta datis utcunque duobus punctis A & B hac lege ut sit AE.AF::BE.BF, & à punctis hisce actis duabus rectis AC, BC concurrentibus ad circulum in puncto quovis C: erit AC ad BC in data ratione AE ad BE.

S PROB.

PROB. XL.

Tab. V. Fig. 3. *Si punctum lucidum A radios versus refringentem superficiem planam CD ejiciat; invenire radium AC, cujus refractus CB impinget in datum punctum B.*

A puncto isto lucido ad refringens planum demitte perpendiculum AD, & cum eo utrinque producto concurrat refractus radius BC in E, & perpendiculum à puncto B demissum in F, & agatur BD; dictisque $AD=a$, $DB=b$, $BF=c$, $DC=x$, statue rationem sinuum incidentiæ & refractionis, hoc est sinuum angulorum CAD, CED esse d ad e, & cum EC & AC (ut notum est) sint in eadem ratione, & AC sit $\sqrt{aa+xx}$ erit $EC=\frac{d}{e}\sqrt{aa+xx}$.

Præterea est ED $\left(=\sqrt{ECq-CDq}\right)=\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}$, & $DF=\sqrt{bb-cc}$, atque $EF=\sqrt{bb-cc}+\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}$. Denique propter similia triangula ECD, EBF, est ED.DC :: EF.FB, &, ductis extremorum & mediorum valoribus in se, $c\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}=x\sqrt{bb-cc}+x\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}$, sive $\overline{c-x}\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}=x\sqrt{bb-cc}$. Et partibus æquationis quadratis & rite dispositis

$$x^4-2cx^3+\frac{\begin{matrix}ddcc\\+ddaa\,xx-2ddaacx+ddaacc\\-eebb\end{matrix}}{dd-ee}=0.$$

PROB.

PROB. XLI.

Invenire locum verticis trianguli D, cujus basis AB datur, & anguli ad basem DAB, DBA datam habent differentiam. Tab. V. Fig. 4.

Ubi angulus ad Verticem, sive (quod perinde est) ubi summa angulorum ad basem datur, docuit Euclides locum verticis esse circumferentiam circuli; proposuimus igitur inventionem loci ubi differentia angulorum ad basem datur. Sit angulus DBA major angulo DAB, sitque ABF eorum data differentia, recta BF occurrente AD in F. Insuper ad BF demittatur normalis DE, ut & ad AB normalis DC, occurrens BF in G. Dictisque $AB = a$, $AC = x$, & $CD = y$, erit $BC = a - x$. Jam in triangulo BCG cum dentur omnes anguli dabitur ratio laterum BC & GC; sit ista d ad a, & erit $CG = \frac{aa - ax}{d}$. Aufer hanc de DC sive y & restabit $DG = \frac{dy - aa + ax}{d}$. Præterea propter similia triangula BGC, DGE est $BG . BC :: DG . DE$. Est autem in triangulo BGC, $a . d :: CG . BC$. Adeoque $aa . dd :: CGq . BCq$, & componendo $aa + dd . dd :: BGq . BCq$. Et extractis radicibus $\sqrt{aa+dd} . d (:: BG . BC) :: DG . DE$. Ergo $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Adhæc cum angulus ABF sit differentia angulorum BAD & ABD, adeoque anguli BAD & FBD æquentur, similia erunt triangula rectangula CAD & EBD, & proinde latera proportionalia $DA . DC :: DB . DE$. Sed est $DC = y$. $DA (= \sqrt{ACq + DCq}) = \sqrt{xx+yy}$. $DB (= \sqrt{BCq + DCq}) = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, & supra erat $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Quare est $\sqrt{xx+yy} . y :: \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} . \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Et extremorum & mediorum quadratis in se ductis III. 29. Euclid.

ductis $aayy - 2axyy + xxyy + y^4 = \frac{ddxxyy + ddy^4}{aa+dd}$
$\frac{-2aadxxy - 2aady^3 + 2adyx^3 + 2adxy^3 + a^4xx}{aa+dd}$
$\frac{+a^4yy - 2a^3x^3 - 2a^3xyy + aax^4 + aaxxyy}{aa+dd}$.

Duc omnes terminos in $aa+dd$, & prodeuntes redige in debitum ordinem, & orietur $x^4 \begin{matrix} -2a \\ +\frac{2d}{a}y \end{matrix} x^3 \begin{matrix} -2dy \\ +aa \end{matrix} xx \begin{matrix} +\frac{2d}{a}y^3 \\ +\frac{2dd}{a}yy \end{matrix} x \begin{matrix} -ddyy \\ -2dy^3 \\ -y^4 \end{matrix} = 0.$

Divide hanc æquationem per $xx - ax \begin{matrix} +dy \\ +yy \end{matrix}$, & orietur $xx \begin{matrix} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{matrix} x \begin{matrix} -yy \\ -dy \end{matrix} = 0$. Duæ itaque prodierunt æquationes in ſolutione hujus Problematis. Prior $xx - ax \begin{matrix} +dy \\ +yy \end{matrix} = 0$ eſt ad circulum, locum nempe puncti D ubi angulus FBD ſumitur ad alias partes rectæ BF quam in figura deſcribitur, exiſtente angulo ABF ſumma angulorum DAB DBA ad baſem, adeoque angulo ADB ad verticem dato. Poſterior $xx \begin{matrix} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{matrix} x \begin{matrix} -yy \\ -dy \end{matrix} = 0$ eſt ad Hyperbolam, locum puncti D ubi angulus FBD ſitum obtinet à recta BF quem in Figura deſcripſimus: hoc eſt ita ut angulus ABF ſit differentia angulorum DAB, DBA ad baſem. Hyperbolæ autem hæc eſt determinatio. Biſeca AB in P. Age PQ conſtituentem angulum BPQ æqualem dimidio anguli ABF. Huic erige normalem PR, & erunt PQ, PR Aſſymptoti hujus Hyperbolæ, & B punctum per quod Hyperbola tranſibit.

Et hinc prodit tale Theorema. Hyperbolæ rectangulæ diametro quavis AB ducta, & à terminis ejus ad Hyperbolæ puncta duo quævis D & H ductis rectis AD, BD, AH, BH; hæ rectæ angulos DAH, DBH ad terminos diametri conſtituent æquales.

Idem

Idem brevius.

Ad PROB. XXIV. *Regulam* de commoda terminorum ad ineundum calculum electione tradidi; ubi obvenit ambiguitas in electione. Hic differentia angulorum ad basem eodem modo se habet ad utrumque angulum; & in constructione Schematis æque potuit addi ad angulum minorem DAB, ducendo ab A rectam ipsi BF parallelam, ac subtrahi ab angulo majori DBA ducendo rectam BF. Quamobrem nec addo nec subtraho, sed dimidium ejus uni angulorum addo, alteri subtraho. Deinde cum etiam ambiguum sit utrum AC vel BC pro termino indefinito cui ordinatim applicata DC insistit adhibeatur, neutrum adhibeo; sed biseco AB in P, & adhibeo PC: vel potius acta MPQ constituente hinc inde angulos APQ, BPM æquales dimidio differentiæ angulorum ad basem, ita ut ea cum rectis AD, BD constituat angulos DQP, DMP æquales; ad MQ demitto normales AR, BN, DO & adhibeo DO pro ordinatim applicata, ac PO pro indefinita linea cui insistit. Voco itaque $PO=x$, $DO=y$, AR vel $BN=b$, & PR vel $PN=c$. Et propter similia triangula BNM, DOM, erit BN.DO::MN.MO. Et dividendo, DO−BN $(y-b)$.DO (y)::MO−MN (ON sive $c-x$).MO. Quare $MO=\frac{cy-xy}{y-b}$. TAB. V. Fig. 5.

Similiter ex altera parte propter similia triangula ARQ, DOQ, erit AR.DO::RQ.QO: & componendo DO+AR $(y+b)$. DO (y)::QO+RQ (OR sive $c+x$).QO. Quare $QO=\frac{cy+xy}{y+b}$. Denique propter æquales angulos DMQ, DQM æquantur MO & QO, hoc est $\frac{cy-xy}{y-b}=\frac{cy+xy}{y+b}$. Divide omnia per y, & multiplica per denominatores, & orietur $cy+cb-xy-xb=cy-cb+xy-xb$, sive $cb=xy$, notissima æquatio ad Hyperbolam.

Quin etiam locus puncti D sine calculo Algebraico prodire potuit. Est enim ex superioribus DO−BN.ON::DO.MO(QO)::

$DO+AR.OR$. Hoc est $DO-BN.DO+BN::ON.OR$, & mixtim $DO.BN::\frac{ON+OR}{2}(NP).\frac{OR-ON}{2}(OP)$. Adeoque $DO\times OP=BN\times NP$.

PROB. XLII.

Locum verticis trianguli invenire cujus Basis datur, & angulorum ad basem unus dato angulo differt à duplo alterius.

Tab. V. Fig 5.

In Schemate novissimo superioris Problematis sit ABD triangulum illud, AB basis bisecta in P, APQ vel BPM triens anguli dati, quo angulus DBA excedit duplum anguli DAB: & angulus DMQ erit duplus anguli DQM. Ad MQ demitte perpendicula AR, BN, DO; & angulum DMQ biseca recta MS occurrente DO in S; & erunt triangula DOQ, SOM similia; adeoque $OQ.OM::OD.OS$, & dividendo $OQ-OM.OM::SD.OS::$ (per 3. VI. Elem.) $DM.OM$ Quare (per 9. V. Elem.) $OQ-OM=DM$. Dictis jam $PO=x$, $OD=y$, AR vel $BN=b$, & PR vel $PN=c$, erit ut in superiori Problemate $OM=\frac{cy-xy}{y-b}$, & $OQ=\frac{cy+xy}{y+b}$, adeoque $OQ-OM$ $=\frac{-2bcy+2xyy}{yy-bb}$. Pone jam $DOq+OMq=DMq$, hoc est $yy+\frac{cc-2cx+xx}{yy-2by+bb}yy$ $=\frac{4bbcc-8bcxy+4xxyy}{y^4-2bbyy+b^4}yy$. Et per debitam reductionem orietur tandem

$$y^4 * \begin{matrix}+cc\\-2bb\\-2cx\\-3xx\end{matrix} yy \begin{matrix}+2bxx\\+4bcx\\+2bcc\end{matrix} y \begin{matrix}+b^4\\-3bbcc\\-2bbcx\\+bbxx\end{matrix} =0.$$

Divide omnia per $y-b$, & evadet

$$y^3+byy \begin{matrix}-bb\\+cc\\-2cx\\-3xx\end{matrix} y \begin{matrix}-b^3\\+3bcc\\+2bcx\\-bxx\end{matrix} =0.$$

Quare punctum D est ad Curvam trium dimensionum; quae tamen evadit Hyperbola ubi angulus BPM statuitur nullus, sive angulorum

rum ad basem unus DBA duplus alterius DAB. Tunc enim BN, sive b evanescente, æquatio fiet $yy = 3xx + 2cx - cc$.

Ex hujus autem æquationis constructione tale elicitur Theorema. Si centro C, Asymptotis CS, CT, angulum SCT 120 graduum continentibus describatur Hyperbola quævis DV, cujus semiaxes sint CV, CA: produc CV ad B, ut sit VB=VC, & ab A&B actis utcunque rectis AD, BD concurrentibus ad Hyperbolam, erit angulus BAD dimidium anguli ABD, triens vero anguli ADE quem recta AD comprehendit cum BD producta. Hoc intelligendum est de Hyperbola quæ transit per punctum V. Quod si ab iisdem punctis A & B actæ rectæ Ad, Bd conveniant ad conjugatam Hyperbolam quæ transit per A: tunc externorum angulorum trianguli ad basem, ille ad B erit duplus alterius ad A. TAB. V. Fig. 6.

PROB. XLIII.

Circulum per data duo puncta describere qui rectam positione datam continget.

Sunto A & B puncta data, & EF recta positione data, & requiratur circulum ABE, per ista puncta describere qui contingat rectam istam FE. Junge AB, & eam biseca in D. Ad D erige normalem DF occurrentem rectæ FE in F, & circuli centrum incidet in hanc novissime ductam DF, puta in C. Junge ergo CB; & ad FE demitte CE normalem, eritque E punctum contactus, ac CB, CE æquales inter se, utpote radii circuli quæsiti. Jam cum puncta A, B, D, & F dentur, esto $DB = a$, ac $DF = b$; & ad determinandum centrum circuli quæratur DC, quam ideo dic x. Jam in triangulo CDB propter angulum ad D rectum, est $\sqrt{DBq + DCq}$, hoc est $\sqrt{aa + xx} = CB$. Est & $DF - DC$ sive $b - x = CF$. Et in triangulo rectangulo CFE cum dentur anguli, dabitur ratio laterum CF & CE; sit ista d ad e; & erit $CE = \frac{e}{d} \times CF$ hoc est $= \frac{eb - ex}{d}$. Pone jam CB & CE, (radios nempe circuli quæsiti,) æquales inter se, & habebitur æquatio TAB. V. Fig. 7.

√

$\sqrt{aa+xx}=\frac{eb-ex}{d}$. Cujus partibus quadratis & multiplicatis per dd, oritur $aadd+ddxx=eebb-2eebx+eexx$. Sive

$$xx=\frac{+eebb \atop -2eebx-aadd}{dd-ee}.$$ Et extracta radice, $x=\frac{-eeb+d\sqrt{eebb+eeaa-ddaa}}{dd-ee}$.

Inventa est ergo longitudo DC adeoque centrum C, quo circulus per puncta A & B describendus est ut contingat rectam FE.

PROB. XLIV.

Circulum per datum punctum describere qui rectas duas positione datas continget.

Tab. V. Fig. 8. Esto datum punctum A, & sint EF, FG rectæ duæ positione datæ, & AEG circulus quæsitus easdem contingens, ac transiens per punctum istud A. Rectâ CF bisecetur angulus EFG & centrum circuli in ipsa reperietur. Sit istud C; & ad EF & FG demissis perpendiculis CE, CG erunt E ac G puncta contactus. Jam in triangulis CEF, CGF, cum anguli ad E & G, sint recti, & anguli ad F semisses sint anguli EFG, dantur omnes anguli adeoque ratio laterum CF & CE vel CG. Sit ista d ad e, & si ad determinandum centrum circuli quæsiti C, assumatur $CF=x$, erit CE vel $CG=\frac{ex}{d}$. Præterea ad FC demitte normalem AH, & cum punctum A detur, dabuntur etiam rectæ AH & FH. Dicantur istæ a & b, & ab FH sive b ablato FC sive x restabit $CH=b-x$. Cujus quadrato $bb-2bx+xx$ adde quadratum ipsius AH, sive aa & summa $aa+bb-2bx+xx$, erit ACq per 47. I. Elem. siquidem angulus AHC ex Hypothesi sit rectus. Pone jam radios circuli AC & CG inter se æquales; hoc est pone æqualitatem inter eorum valores, vel inter quadrata eorum, & habebitur æquatio $aa+bb-2bx+xx=\frac{eexx}{dd}$. Aufer utrobique xx,

Resolvitur ut Prob. 43. Nam dato puncto A, datur & aliud punctum B.

&

& mutatis omnibus signis erit $-aa-bb+2bx=xx-\frac{eexx}{dd}$. Duc omnia in dd, ac divide per $dd-ee$, & evadet $\frac{-aadd-bbdd+2bddx}{dd-ee}=xx$. Cujus æquationis extracta radix est $x=\frac{bdd-d\sqrt{eebb+eeaa-ddaa}}{dd-ee}$. Inventa est itaque longitudo FC, adeoque punctum C, quod centrum est circuli quæsiti.

Si inventus valor x sive FC auferatur de b sive HF, restabit $HC=\frac{-eeb+d\sqrt{eebb+eeaa-ddaa}}{dd-ee}$, eadem æquatio quæ in priori problemate prodiit, ad determinandum longitudinem DC.

PROB. XLV.

Circulum per data duo puncta describere, qui alium circulum positione datum continget. Vide *Prop.* 21.

TAB. VI. Fig. 1.

Sint A, B puncta data, EK circulus positione & magnitudine datus, F centrum ejus, ABE circulus quæsitus per puncta A & B transiens, ac tangens alterum circulum in E, & C centrum ejus. Ad AB productum demitte perpendicula CD, & FG & age CF, secantem circulos in puncto contactus E, ac age etiam FH parallelam DG, & occurrentem CD in H. His constructis dic AD vel $DB=a$, DG vel $HF=b$, $GF=c$, & EF (radium nempe circuli dati) $=d$, atque $DC=x$: & erit $CH(=CD-FG)=x-c$, & $CFq\,(=CHq+HFq)=xx-2cx+cc+bb$, atque $CBq\,(=CDq+DBq)=xx+aa$, adeoque CB vel $CE=\sqrt{xx+aa}$. Huic adde EF, & habebitur $CF=d+\sqrt{xx+aa}$, cujus quadratum $dd+aa+xx+2d\sqrt{xx+aa}$, æquatur valori ejusdem CFq prius invento, nempe $xx-2cx+cc+bb$. Aufer utrobique xx, & restabit $dd+aa+2d\sqrt{xx+aa}=cc+bb-2cx$. Aufer insuper $dd+aa$, & habebitur $2d\sqrt{xx+aa}=cc+bb-dd-aa-2cx$. Jam, abbreviandi causa, pro $cc+bb-dd-aa$, scribe $2gg$, & habe-

habebitur $2d\sqrt{xx+aa}=2gg-2cx$, sive $d\sqrt{xx+aa}=gg-cx$. Et partibus æquationis quadratis, erit $ddxx+ddaa=g^4-2ggcx+ccxx$. Utrinque aufer $ddaa$ & $ccxx$, & restabit $ddxx-ccxx=g^4-ddaa-2ggcx$. Et partibus æquationis divisis per $dd-cc$, habebitur $xx=\frac{g^4-ddaa-2ggcx}{dd-cc}$. Atque per extractionem radicis affectæ $x=\frac{-ggc+\sqrt{g^4dd-d^4aa+ddaacc}}{dd-cc}$.

Inventa igitur x, sive longitudine DC, biseca AB in D, & ad D erige perpendiculum $DC=\frac{-ggc+d\sqrt{g^4-aadd+aacc}}{dd-cc}$. Dein centro C per punctum A vel B describe circulum ABE; nam hic continget alterum circulum EK, & transibit per utrumque punctum A, B. Q. E. F.

PROB. XLVI.

Circulum per datum punctum describere qui datum circulum, & rectam lineam positione datam continget.

TAB. VI. Fig. 2. Sit circulus iste describendus BD, ejus centrum C, punctum per quod describi debet B, recta quam continget AD, punctum contactus D, circulus quem continget GEM, ejus centrum F, & punctum contactus E. Junge CB, CD, CF, & CD erit perpendicularis ad AD, atque CF secabit circulos in puncto contactus E. Produc CD ad Q ut sit DQ=EF & per Q age QN parallelam AD. Denique à B & F ad AD & QN demitte perpendicula BA, FN, & à C ad AB & FN perpendicula CK, CL. Et cum sit BC=CD vel AK, erit $BK\ (=AB-AK)=AB-BC$, adeoque $BKq=ABq-2AB\times BC+BCq$. Aufer hoc de BCq, & restabit $2AB\times BC-ABq$, pro quadrato de CK. Est itaque $AB\times\overline{2BC-AB}=CKq$; & eodem argumento erit $FN\times\overline{2FC-FN}=CLq$, atque adeo $\frac{CKq}{AB}+AB=2BC$, & $\frac{CLq}{FN}+FN=2FC$.

Quam-

Quamobrem si pro AB, CK, FN, KL, & CL, scribas a, y, b, c, & $c-y$, erit $\frac{yy}{2a}+\frac{1}{2}a=$ BC, & $\frac{cc-2cy+yy}{2b}+\frac{1}{2}b=$ FC. De FC aufer BC, & restabit EF $=\frac{cc-2cy+yy}{2b}+\frac{1}{2}b-\frac{yy}{2a}-\frac{1}{2}a$. Jam si puncta ubi FN producta secat rectam AD, & circulum GEM notentur literis H, G, & M & in HG producta capiatur HR=AB, cum sit HN (=DQ − EF) = GF, addendo FH utrinque erit FN=GH, adeoque AB — FN (=HR — GH) = GR, & AB — FN+2EF, hoc est $a-b+2$EF = RM, & $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$ + EF = $\frac{1}{2}$RM. Quare cum supra fuerit EF $=\frac{cc-2cy+yy}{2b}+\frac{1}{2}b-\frac{yy}{2a}-\frac{1}{2}a$, si hoc scribatur pro EF habebitur $\frac{1}{2}$RM $=\frac{cc-2cy+yy}{2b}-\frac{yy}{2a}$. Dic ergo RM d, & erit $d=\frac{cc-2cy+yy}{b}-\frac{yy}{a}$. Duc omnes terminos in a & b, & orietur $abd=acc-2acy+ayy-byy$. Aufer utrinque $acc-2acy$, & restabit $abd-acc+2acy=ayy-byy$. Divide per $a-b$, & orietur $\frac{abd-acc+2acy}{a-b}=yy$. Et extracta radice $y=\frac{ac}{a-b}\pm\sqrt{\frac{aabd-abbd+abcc}{aa-2ab+bb}}$. Quæ conclusiones sic abbreviari possunt. Pone $c.b::d.e$, dein $a-b.a::c.f$; & erit $fe-fc+2fy=yy$, sive $y=f\pm\sqrt{ff+fe-fc}$. Invento y sive KC vel AD, cape AD $=f\pm\sqrt{ff+fe-fc}$, ad D erige perpendiculum DC (=BC) $=\frac{\text{KC}q}{2\text{AB}}+\frac{1}{2}$AB, & centro C, intervallo CB vel CD describe circulum BDE, nam hic transiens per datum punctum B, tanget rectam AD in D, & circulum GEM in E. Q.E.F.

Hinc circulus etiam describi potest qui duos datos circulos, & rectam positione datam continget. Sint enim circuli dati RT, SV, corum centra B, F, & recta positione data PQ. Centro F, radio TAB. VI. Fig. 5.

$FS - BR$ describe circulum EM. A puncto B, ad rectam PQ demitte perpendiculum BP, & producto eo ad A ut sit $PA = BR$ per A age AH parallelam PQ, & circulus describatur qui transeat per punctum B, tangatque rectam AH, & circulum EM. Sit ejus centrum C; junge BC secantem circulum RT in R, & eodem centro C, radio vero CR descriptus circulus RS tanget circulos RT, SV, & rectam PQ, ut ex constructione manifestum est.

PROB. XLVII.

Circulum describere qui per datum punctum transibit; & alios duos positione, & magnitudine datos circulos continget.

Tab. VI. Fig. 4. Esto punctum datum A, sintque circuli positione, & magnitudine dati TIV, RHS, centra eorum C & B, circulus describendus AIH centrum ejus D, & puncta contactus I & H. Junge AB, AC, AD, DB, secetque AB producta circulum RHS in punctis R & S, & AC, producta circulum TIV in T & V. Et à punctis D & C demissis perpendiculis DE ad AB, & DF ad AC occurrente AB in G, atque CK ad AB; in triangulo ADB erit $ADq - DBq + ABq = 2AE \times AB$, per 13. II. Elem. Sed $DB = AD + BR$, adeoque $DBq = ADq + 2AD \times BR + BRq$. Aufer hoc de $ADq + ABq$, & restabit $ABq - 2AD \times BR - BRq$, pro $2AE \times AB$. Est & $ABq - BRq = \overline{AB - BR} \times \overline{AB + BR} = AR \times AS$. Quare $AR \times AS - 2AD \times BR = 2AE \times AB$. Et $\frac{AR \times AS - 2AB \times AE}{BR} = 2AD$.

Et simili ratiocinio in triang. ADC emerget iterum $2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Quare $\frac{RAS - 2BAE}{BR} = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Et $\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} = \frac{2CAF}{CT}$. Et $\overline{\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR}} \times \frac{CT}{2AC} = AF$. Unde cum sit $AK . AC :: AF . AG$, erit

AG

$AG = \overline{\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR}} \times \frac{CT}{2AK}$. Aufer hoc de AE sive $\frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$, & restabit $GE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT}} \times \frac{CT}{2AK}$. Unde cum sit $KC . AK :: GE . DE$; erit $DE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$. In AB cape AP quæ sit ad AB ut CT ad BR, & erit $\frac{2PAE}{CT} = \frac{2BAE}{BR}$, adeoque $\frac{2PK \times AE}{CT} = \frac{2BAE}{BR} - \frac{2KAE}{CT}$, adeoque $DE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2PK \times AE}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$. Ad AB erige ergo perpendiculum $AQ = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$, & in eo cape $QO = \frac{PK \times AE}{KC}$, & erit $AO = DE$.

Junge DO, DQ, CP, & triangula DOQ, CKP erunt similia, quippe quorum anguli ad O & K sunt recti, & latera ($KC . PK :: AE$, vel $DO . QO$) proportionalia. Anguli ergo OQD, KPC æquales sunt, & proinde QD perpendicularis est ad CP. Quamobrem si agatur AN parallela CP, & occurrens QD in N, angulus ANQ erit rectus, & triangula AQN, PCK similia; adeoque $PC . KC :: AQ . AN$. Unde cum AQ sit $\overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$, AN erit $\overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2PC}$. Produc AN ad M ut sit $NM = AN$, & erit $AD = DM$, adeoque circulus quæsitus transibit per punctum M. Cum ergo punctum M datum sit, ex his, sine ulteriori Analysi, talis emergit Problematis resolutio.

In AB cape AP, quæ sit ad AB ut CT ad BR; junge CP eique parallelam age AM, quæ sit ad $\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}$, ut CT ad PC: & ope *Prob.* 45. per puncta A & M describe circulum AIHM qui

qui tangat alterutrum circulorum TIV, RHS, & idem circulus tanget utrumque. Q. E. F.

Et hinc circulus etiam describi potest qui tres circulos positione & magnitudine datos continget. Sunto trium datorum circulorum radii A, B, C, & centra D, E, F. Centris E & F, radiis $B \pm A$, $C \pm A$ describantur duo circuli, & tertius circulus qui hosce tangat, transeatque per punctum D. Sit hujus radius G, & centrum H, & eodem centro H radio $G \pm A$ descriptus circulus continget tres primos circulos, ut fieri oportuit.

PROB. XLVIII.

TAB. VI. Fig. 5. *Si ad extremitates fili DAE circa paxillum A labentis appendantur pondera duo D & E, quorum pondus E labitur per lineam obliquam BG: Invenire locum ponderis E, ubi pondera hæc in æquilibrio consistunt.*

Puta factum, & ipsi AD age parallelam EF quæ sit ad AE, ut pondus E ad pondus D. Et à punctis A & F ad lineam BG demitte perpendicula AB, FG. Jam cum pondera ex Hypothesi sint ut lineæ AE, EF, exponantur pondera per lineas istas, pondus D per lineam AE, & pondus E per lineam EF. Ergo Corpus E proprii ponderis vi directa EF tendit versus F, & vi obliqua EG tendit versus G. Et idem Corpus E, ponderis D vi directa AE, trahitur versus A, & vi obliqua BE, trahitur versus B. Cum itaque pondera se mutuo sustineant in æquilibrio, vis qua pondus E trahitur versus B æqualis esse debet vi contrariæ qua tendit versus G, hoc est BE æqualis esse debet ipsi EG. Jam vero datur ratio AE ad EF ex Hypothesi, & propter datum angulum FEG datur etiam ratio FE ad EG cui BE æqualis est. Ergo datur ratio AE ad BE. Datur etiam AB longitudine. Et inde triangulum ABE, & punctum

ctum E facile dabitur. Nempe dic $AB=a$, $BE=x$, & erit $AE=\sqrt{aa+xx}$, sit insuper AE ad BE in data ratione d ad e, & erit $e\sqrt{aa+xx}=dx$. Et partibus æquationis quadratis & reductis, $eeaa=ddxx-eexx$, sive $\frac{ea}{\sqrt{dd-ee}}=x$. Inventa est igitur longitudo BE quæ determinat locum ponderis E. Q. E. F.

Quod si pondus utrumque per lineam obliquam descendat, Computum sic institui potest. Sint CD, BE obliquæ lineæ positione datæ per quas pondera ista D & E descendunt. A paxillo A ad has lineas demitte perpendicula AC, AB, iisque productis occurrant in punctis G & H lineæ EG, DH, à ponderibus perpendiculariter ad Horizontem erectæ, & vis qua pondus E conatur descendere juxta lineam perpendicularem, hoc est tota gravitas ipsius E erit ad vim qua pondus idem conatur descendere juxta lineam obliquam BE ut GE ad BE, atque vis qua conatur juxta lineam istam obliquam BE descendere erit ad vim qua conatur juxta lineam AE descendere hoc est ad vim qua filum AE distenditur ut BE ad AE. Adeoque gravitas ipsius E, erit ad tensionem fili AE ut GE ad AE. Et eadem ratione gravitas ipsius D erit ad tensionem fili AD ut HD ad AD. Sit itaque fili totius $DA+AE$ longitudo c, sitque pars ejus $AE=x$, & erit altera pars $AD=c-x$. Et quoniam est $AEq-ABq=BEq$, & $ADq-ACq=CDq$, sit insuper $AB=a$, & $AC=b$, & erit $BE=\sqrt{xx-aa}$ & $CD=\sqrt{xx-2cx+cc-bb}$. Adhæc cum triangula BEG, CDH, dentur specie, sit $BE.EG::f.E$, & $CD.DH::f.g$, & erit $EG=\frac{E}{f}\sqrt{xx-aa}$, & $DH=\frac{g}{f}\sqrt{xx-2cx+cc-bb}$. Quamobrem cum sit $GE.AE::$ pondus $E.$ tensionem AE. Et $HD.AD::$ pondus $D.$ tensionem AD, & tensiones istæ æquentur inter se, erit $\frac{Ex}{\frac{E}{f}\sqrt{xx-aa}}=$ tensioni $AE=$ tensioni AD $=\frac{Dc-Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{xx-2cx+cc-bb}}$. Cujus æquationis reductione pro-

venit

TAB. VI. Fig. 6.

venit $gx\sqrt{xx-2cx+cc-bb}=\overline{Dc-Dx}\sqrt{xx-aa}$, sive

$$\begin{matrix} gg \\ -DD \end{matrix}\,x^4 \begin{matrix} -2ggc \\ +2DDc \end{matrix}\,x^3 \begin{matrix} +ggcc \\ -ggbb \\ -DDcc \\ +DDaa \end{matrix}\,xx-2DDcaax+DDccaa=0.$$

Si casum desideras quo hoc Problema per Regulam & circinum construi queat, pone pondus D ad pondus E ut ratio $\frac{BE}{EG}$ ad rationem $\frac{CD}{DH}$, & evadet $g=D$, adeoque vice præcedentis æquationis habebitur hæc $-\frac{aa}{bb}xx-2aacx+aacc=0$; sive $x=\frac{ac}{a+b}$.

PROB. XLIX.

TAB. VI. Fig 7. *Si ad filum DACBF circa paxillos duos A, B, labile appendantur tria pondera D, E, F; D & F ad extremitates fili & E ad medium ejus punctum C, inter paxillos positum: Ex datis ponderibus & situ paxillorum invenire situm puncti C, ad quod medium pondus appenditur ubi pondera consistunt in æquilibrio.*

Cum tensio fili AC æquetur tensioni fili AD, & tensio fili BC tensioni fili BF, tensiones filorum AC, BC, EC erunt ut pondera D, F, E. In eadem ponderum ratione cape partes filorum CG, CH, CI. Compleatur triangulum GHI. Produc IC donec ea occurrat GH in K; & erit GK=KH, & CK=$\frac{1}{2}$CI, adeoque C centrum gravitatis trianguli GHI. Nam per C agatur ipsi CE perpendiculare PQ, & huic à punctis G & H perpendicularia GP, HQ. Et si vis qua filum AC vi ponderis D trahit punctum C versus A, exponatur per lineam GC, vis qua filum istud trahet idem punctum versus P exponetur per lineam CP, & vis qua trahit illud versus K exponetur per lineam GP. Et similiter

liter vires quibus filum BC vi ponderis F, trahit idem punctum C versus B, Q & K, exponentur per lineas CH, CQ, HQ; & vis qua filum CE vi ponderis E, trahit punctum illud C versus E, exponetur per lineam CI. Jam cum punctum C viribus æquipollentibus sustineatur in æquilibrio, summa virium quibus fila AC & BC, simul trahunt punctum C versus K, æqualis erit vi contrariæ qua filum EC, trahit punctum illud versus E, hoc est summa GP+HQ, æqualis erit ipsi CI; & vis qua filum AC trahit punctum C versus P, æqualis erit vi contrariæ qua filum BC, trahit idem punctum C versus Q, hoc est linea PC æqualis lineæ CQ. Quare cum PG, CK & QH parallelæ sint, erit etiam $GK=KH$, & $CK\,(=\frac{GP+HQ}{2})=\frac{1}{2}CI$. Quod erat ostendendum. Restat itaque triangulum GCH determinandum, cujus latera GC & HC, dantur, una cum linea CK, quæ à vertice C ad medium basis ducitur. Demittatur itaque à vertice C ad basem GH perpendiculum CL, & erit $\frac{GCq-CHq}{2GH}=KL=\frac{GCq-KCq-GKq}{2GK}$. Pro $2GK$ scribe GH, & rejecto communi divisore GH, & ordinatis terminis, erit $GCq-2KCq+CHq=2GKq$, sive $\sqrt{\frac{1}{2}GCq-KCq+\frac{1}{2}CHq}=GK$. Invento GK vel KH, dantur simul anguli GCK, KCH, sive DAC, FBC. Quare à punctis A & B in datis istis angulis DAC, FBC duc lineas AC, BC concurrentes in puncto C, & istud C erit punctum quod quæritur.

Cæterum quæstiones omnes quæ sunt ejusdem generis non semper opus est per Algebram sigillatim solvere, sed ex solutione unius plerumque consectatur solutio alterius. Ut si jam proponeretur hæc quæstio.

TAB. VI. Fig. 8. *Filo ACDB in datas partes AC, CD, DB diviso & extremitatibus ejus ad paxillos duos A, B positione datos ligatis, si ad puncta divisionum C ac D appendantur pondera duo E & F; ex dato pondere F, & situ punctorum C ac D, cognoscere pondus E.*

Ex præcedentis Problematis solutione satis facile colligetur hæcce solutio hujus. Produc lineas AC, BD, donec occurrant lineis DF, CE in G & H; & erit pondus E ad pondus F ut DG ad CH.

Et hinc obiter patet ratio componendi stateram ex solis filis, qua pondus corporis cujusvis E, ex unico dato pondere F cognosci potest.

PROB. L.

Lapide in puteum decidente, ex sono lapidis fundum percutientis, altitudinem putei cognoscere.

Sit altitudo putei x, & si lapis motu uniformiter accelerato descendat per spatium quodlibet datum a in tempore dato b, & sonus motu uniformi transeat per idem spatium datum a in tempore dato d, lapis descendet per spatium x, in tempore $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, sonus autem qui fit à lapide in fundum putei impingente ascendet per idem spatium x, in tempore $\frac{dx}{a}$. Ut enim sunt spatia gravibus decidentibus descripta, ita sunt quadrata temporum descensus. Vel ut radices spatiorum, hoc est ut $\sqrt{x}$ & $\sqrt{a}$, ita sunt ipsa tempora. Et ut spatia x & a, per quæ sonus transit, ita sunt tempora transitus. Ex horum temporum $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ & $\frac{dx}{a}$ summa, conflatur tempus à lapide demisso ad sonus reditum. Hoc tempus ex observatione cognosci potest.

poteſt. Sit ipſum t, & erit $b\sqrt{\frac{x}{a}}+\frac{dx}{a}=t$. Ac $b\sqrt{\frac{x}{a}}=t-\frac{dx}{a}$. Et partibus quadratis $\frac{bbx}{a}=tt-\frac{2tdx}{a}+\frac{ddxx}{aa}$. Et per reductionem $xx=\frac{2adt+abb}{dd}x-\frac{aatt}{dd}$. Et extracta radice $x=\frac{adt+\frac{1}{2}abb}{dd}-\frac{ab}{2dd}\sqrt{bb+4dt}$.

PROB. LI.

Dato globo A, poſitione parietis DE, & centri globi B à pariete diſtantia BD; invenire molem globi B ea lege ut in ſpatiis liberis, & vi gravitatis deſtitutis, ſi globus A, cujus centrum in linea BD, quæ ad parietem perpendicularis eſt, ultra B producta conſiſtit, uniformi cum motu verſus D feratur donec is impingat in alterum quieſcentem globum B; globus iſte B poſtquam reflectitur à pariete, denuo occurrat globo A in dato puncto C. TAB. VII. Fig. 1.

Sit globi A celeritas ante reflectionem a & erit per PROB. XII. p. 77. celeritas globi A poſt reflexionem $=\frac{aA-aB}{A+B}$, & celeritas globi B poſt reflexionem $=\frac{2aA}{A+B}$. Ergo celeritas globi A ad celeritatem globi B eſt ut $A-B$ ad $2A$. In GD cape $gD=GH$ diametro nempe globi B, & celeritates iſtæ erunt ut GC ad $Gg+gC$. Nam ubi Globus A impegit in globum B, punctum G quod in ſuperficie globi B exiſtens movetur in linea AD, perget per ſpatium Gg antequam globus ille B impinget in parietem, & per ſpatium gC poſtquam à pariete reflectitur; hoc eſt per totum ſpatium $Gg+gC$, in eodem tempore quo globi A punctum F perget per ſpatium GC, eo ut globus uterque rurſus conveniant & in ſe mu-

tuo impingant in puncto dato C. Quamobrem cum dentur intervalla BC & CD, dic $BC = m$, $BD + CD = n$, & $BG = x$, & erit $GC = m + x$, & $Gg + gC = GD + DC - 2gD = GB + BD + DC - 2GH = x + n - 4x$, seu $= n - 3x$. Supra erat $A - B$ ad $2A$ ut celeritas globi A ad celeritatem globi B, & celeritas globi A ad celeritatem globi B ut GC ad $Gg + gC$, adeoque $A - B$ ad $2A$ ut GC ad $Gg + gC$, ergo cum sit $GC = m + x$, & $Gg + gC = n - 3x$, erit $A - B$ ad $2A$ sicut $m + x$ ad $n - 3x$. Porro globus A est ad globum B ut cubus radii ejus AF ad cubum radii alterius GB, hoc est si ponas radium AF esse s, ut s^3 ad x^3. Ergo $s^3 - x^3 . 2s^3$ $(:: A - B . 2A) :: m + x . n - 3x$. Et ductis extremis & mediis in se habebitur æquatio $s^3 n - 3s^3 x - nx^3 + 3x^4 = 2ms^3 + 2xs^3$. Et per reductionem $3x^4 - nx^3 - 5s^3 x \begin{array}{l} + s^3 n \\ - 2s^3 m \end{array} = 0$. Cujus æquationis constructione dabitur globi B semidiameter x; quo dato datur etiam Globus ille. Q. E. F.

Nota vero quod ubi punctum C jacet ad contrarias partes globi B, debet signum quantitatis $2m$ mutari, & scribi $3x^4 - nx^3 - 5s^3 x \begin{array}{l} + s^3 n \\ + 2s^3 m \end{array} = 0$.

Si datus esset Globus B & quæreretur Globus A ea lege ut globi duo post reflexionem convenirent in C, quæstio foret facilior. Nempe in inventa æquatione novissima supponendum esset x dari & s quæri. Qua ratione per debitam reductionem illius æquationis, translatis terminis $-5s^3 x + s^3 n - 2s^3 m$ ad æquationis partem contrariam, ac divisa utraque parte per $5x - n + 2m$, emergeret $\frac{3x^4 - nx^3}{5x - n + 2m} = s^3$. Ubi per solam extractionem radicis cubicæ obtinebitur s.

Quod si dato Globo utroque quæreretur punctum C in quo post reflexionem ambo in se mutuo impingerent: Cum supra fuerit $A - B$ ad $2A$ ut GC ad $Gg + gC$ ergo invertendo & componendo $3A - B$ erit ad $A - B$ ut $2Gg$ ad distantiam quæsitam GC.

PROB.

PROB. LII.

Si globi duo A & B tenui jungantur filo PQ, & pendente globo B à globo A, si dimittatur globus A, ita ut globus uterque simul sola gravitatis vi in eadem linea perpendiculari PQ cadere incipiat; dein globus inferior B, postquam à fundo seu plano horizontali FG sursum reflectitur, superiori decidenti globo A occurrat in puncto quodam D: Ex data fili longitudine PQ, & puncti illius D à fundo distantia DF, invenire altitudinem PF, à qua globus superior A ad hunc effectum demitti debet. TAB. VII. Fig. 2.

Sit fili PQ longitudo a. In perpendiculo PQRF ab F sursum cape FE æqualem globi inferioris diametro QR, ita ut cum globi illius punctum infimum R incidit in fundum ad F, punctum ejus supremum Q occupet locum E; sitque ED distantia per quam globus ille postquam à fundo reflectitur ascendendo transit antequam globo superiori decidenti occurrat in puncto D. Igitur ob datam puncti D à fundo distantiam DF, globique inferioris diametrum EF, dabitur eorum differentia DE. Sit ea $=b$. Sitque altitudo per quam globus ille inferior antequam impingit in fundum cadendo describit RF vel QE$=x$, siquidem ea ignoretur. Et invento x si eidem addantur EF & PQ habebitur altitudo PF, à qua globus superior ad effectum desideratum demitti debet.

Cum igitur sit PQ$=a$, & QE$=x$, erit PE$=a+x$. Aufer DE seu b, & restabit PD$=a+x-b$. Est autem tempus descensus globi A ut radix spatii cadendo descripti seu $\sqrt{a+x-b}$, & tempus descensus globi alterius B ut radix spatii cadendo descripti, seu $\sqrt{x}$, & tempus ascensus ejusdem ut differentia radicis illius & radicis spatii quod cadendo tantum à Q ad D describeretur. Nam hæc differentia est ut tempus descensus à D ad E, quod æquale est tempori ascensus ab E ad D. Est autem differentia illa $\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$.

 Unde

Unde tempus descensus & ascensus conjunctim erit ut $2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Quamobrem cum hoc tempus æquetur tempori descensus globi superioris erit $\sqrt{a+x-b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Cujus æquationis partibus quadratis habebitur $a+x-b = 5x - b - 4\sqrt{xx-bx}$, seu $a = 4x - 4\sqrt{xx-bx}$, & ordinata æquatione $4x - a = 4\sqrt{xx-bx}$. Cujus partes iterum quadrando oritur $16xx - 8ax + aa = 16xx - 16bx$, seu $aa = 8ax - 16bx$. Et divisis omnibus per $8a - 16b$, fiet $\frac{aa}{8a-16b} = x$. Fac igitur ut $8a - 16b$ ad a ita a ad x, & habebitur x seu QE. Q. E. I.

Quod si ex dato QE quæreretur fili longitudo PQ seu a; eadem æquatio $aa = 8ax - 16bx$ extrahendo affectam radicem quadraticam daret $a = 4x - \sqrt{16xx - 16bx}$. Id est si sumas QY mediam proportionalem inter QD & QE, erit $PQ = 4EY$. Nam media illa proportionalis erit $\sqrt{x \times x-b}$, seu $\sqrt{xx-bx}$ quod subductum de x, seu QE relinquit EY, cujus quadruplum est $4x - 4\sqrt{xx-bx}$.

Sin vero ex datis tum QE seu x tum fili longitudine PQ seu a, quæreretur punctum D in quo globus superior in inferiorem incidit; puncti illius à dato puncto E distantia DE seu b, è præcedente æquatione $aa = 8ax - 16bx$, eruetur transferendo aa & $16bx$ ad æquationis partes contrarias cum signis mutatis, & omnia dividendo per $16x$. Orietur enim $\frac{8ax - aa}{16x} = b$. Fac igitur ut $16x$, ad $8x - a$ ita a ad b, & habebitur b seu DE.

Hactenus supposui globos tenui filo connexos simul dimitti. Quod si nullo connexi filo diversis temporibus dimittantur, ita ut globus superior A verbi gratia prius dimissus, descenderit per spatium PT antequam globus alter incipiat cadere, & ex datis distantiis PT, PQ ac DE quæratur altitudo PF à qua globus superior dimitti debet ea lege ut in inferiorem incidat ad punctum D; sit $PQ = a$, $DE = b$, $PT = c$, & $QE = x$, & erit $PD = a + x - b$ ut supra. Et tempora quibus globus superior cadendo describat spatia PT ac TD,

TD, & globus inferior prius cadendo dein reascendendo describat summam spatiorum QE+ED erunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{PD}-\sqrt{PT}$, & $2\sqrt{QE}-\sqrt{QD}$ hoc est ut $\sqrt{c}$, $\sqrt{a+x-b}-\sqrt{c}$, & $2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. At ultima duo tempora, propterea quod spatia TD, & QE+ED simul describuntur, æqualia sunt. Ergo $\sqrt{a+x-b}-\sqrt{c}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. Et partibus quadratis $a+c-2\sqrt{ca+cx-cb}=4x-4\sqrt{xx-bx}$. Pone $a+c=e$, & $a-b=f$, & erit per debitam reductionem $4x-e+2\sqrt{cf+cx}=4\sqrt{xx-bx}$, & partibus quadratis $ee-8ex+16xx+4cf+4cx+\overline{16x-4e}\sqrt{cf+cx}=16xx-16bx$. Ac deletis utrobique $16xx$ & pro $ee+4cf$ scripto m nec non pro $8e-16b-4c$ scripto n, habebitur per debitam reductionem $\overline{16x-4e}\sqrt{cf+cx}=nx-m$. Et partibus quadratis $256cfxx+256cx^3-128cefx-128cexx+16ceef+16ceex=nnxx-2mnx+mm$. Et ordinata æquatione

$$256cx^3\begin{matrix}+256cf\\-128ce\\-nn\end{matrix}xx\begin{matrix}-128cef\\+16cee\\+2mn\end{matrix}x\begin{matrix}+16ceef\\-mm\end{matrix}=0.$$

Cujus æquationis constructione dabitur x seu QE, cui si addas datas distantias PQ, & EF habebitur altitudo PF quam oportuit invenire.

PROB. LIII.

Si globi duo quiescentes superior A, & inferior B diversis temporibus dimittantur; & globus inferior eo temporis momento cadere incipiat ubi superior cadendo jam descripsit spatium PT; invenire loca α, β quæ globi illi cadentes occupabunt ubi eorum intervallum $\varpi\chi$ dato æquale est. TAB. VII. Fig. 3.

Cum dentur distantiæ PT, PQ, & $\varpi\chi$ dic primam a, secundam b, tertiam c, & pro Pϖ seu spatio quod globus superior antequam pervenit ad locum quæsitum α cadendo describit ponatur x. Jam tempora quibus globus superior describit spatia PT, Pϖ, Tϖ, &

& inferior ſpatium $Q\chi$ ſunt, ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\varpi}$, $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$, & $\sqrt{Q\chi}$. Quorum temporum poſteriora duo, eo quod globi cadendo ſimul deſcribant ſpatia $T\varpi$ & $Q\chi$, ſunt æqualia. Unde & $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$ æquale erit $\sqrt{Q\chi}$. Erat $P\varpi = x$, & $PT = a$, & ad $P\varpi$ addendo $\varpi\chi$ ſeu c & à ſumma auferendo PQ ſeu b habebitur $Q\chi = x + c - b$. Quamobrem his ſubſtitutis fiet $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{x + c - b}$. Et æquationis partibus quadratis orietur $x + a - 2\sqrt{ax} = x + c - b$. Ac deleto utrobique x, & ordinata æquatione habebitur $a + b - c = 2\sqrt{ax}$. Et partibus quadratis erit quadratum de $a + b - c$ æquale $4ax$, & quadratum illud diviſum per $4a$ æquale x, ſeu $4a$ ad $a + b - c$ ſicut $a + b - c$ ad x. Ex invento autem x ſeu $P\varpi$ datur globi ſuperioris decidentis locus quæſitus α. Et per locorum diſtantiam ſimul datur etiam locus inferioris β.

Et hinc ſi punctum quæratur ubi globus ſuperior cadendo tandem impinget in inferiorem; ponendo diſtantiam $\varpi\chi$ nullam eſſe ſeu delendo c, dic $4a$ ad $a + b$ ut $a + b$ ad x, ſeu $P\varpi$, & punctum ϖ erit quod quæris.

Et viciſſim ſi detur punctum illud ϖ vel χ in quo globus ſuperior incidit in inferiorem, & quæratur locus T quem ſuperioris globi decidentis punctum imum P tunc occupabat cum globus inferior incipiebat cadere; quoniam eſt $4a$ ad $a + b$ ut $a + b$ ad x, ſeu ductis extremis & mediis in ſe $4ax = aa + 2ab + bb$, & per æquationis debitam ordinationem $aa = 4ax - 2ab - bb$; extrahe radicem quadraticam & proveniet $a = 2x - b - 2\sqrt{xx - bx}$. Cape ergo $V\varpi$ mediam proportionalem inter $P\varpi$ & $Q\varpi$, & verſus V cape $VT = VQ$, & erit T punctum quod quæris. Nam $V\varpi$ erit $= \sqrt{P\varpi \times Q\varpi}$ hoc eſt $= \sqrt{x \times \overline{x - b}}$ ſeu $= \sqrt{xx - bx}$; cujus duplum ſubductum de $2x - b$, ſeu de $2P\varpi - PQ$, hoc eſt de $PQ + 2Q\varpi$ relinquit $PQ - 2VQ$ ſeu $PV - VQ$, hoc eſt PT.

Si denique globorum, poſtquam ſuperior incidit in inferiorem, & impetu in ſe invicem facto inferior acceleratur, ſuperior retardatur, deſiderantur loci ubi inter cadendum diſtantiam datæ rectæ æqualem acquirent: Quærendus erit primo locus ubi ſuperior impingit in inferiorem; dein ex cognitis tum magnitudinibus globorum tum

co-

eorum ubi in se impingunt celeritatibus inveniendæ sunt celeritates quas proxime post reflexionem habebunt, idque per modum Prob. XII. pag 77. Postea quærenda sunt loca summa ad quæ globi celeritatibus hisce si sursum ferantur ascenderent, & inde cognoscentur spatia quæ globi datis temporibus post reflexionem cadendo describent, ut & differentia spatiorum: & vicissim ex assumpta illa differentia, per Analysin regredietur ad ipsa spatia cadendo descripta.

Ut si globus superior incidit in inferiorem ad punctum ϖ, & post reflexionem celeritas superioris deorsum tanta sit, ut si sursum esset ascendere faceret globum illum per spatium ϖN, & inferioris celeritas deorsum tanta esset, ut si sursum esset, ascendere faceret globum illum inferiorem per spatium ϖM; tum tempora quibus globus superior vicissim descenderet per spatia $N\varpi$, NG, & inferior per spatia $M\varpi$, MH, forent ut $\sqrt{N\varpi}$, $\sqrt{NG}$, $\sqrt{M\varpi}$, $\sqrt{MH}$, adeoque tempora quibus globus superior conficeret spatium ϖG, & inferior spatium ϖH, forent ut $\sqrt{NG}-\sqrt{N\varpi}$, ad $\sqrt{MH}-\sqrt{M\varpi}$. Pone hæc tempora æqualia esse, & erit $\sqrt{NG}-\sqrt{N\varpi}=\sqrt{MH}-\sqrt{M\varpi}$. Et insuper cum detur distantia GH pone $\varpi G+GH=\varpi H$. Et harum duarum æquationum reductione solvetur problema. Ut si sit $M\varpi=a$, $N\varpi=b$, $GH=c$, $\varpi G=x$; erit juxta posteriorem æquationem $x+c=\varpi H$. Adde $M\varpi$ fiet $MH=a+c+x$. Ad ϖG adde $N\varpi$, & fiet $NG=b+x$. Quibus inventis, juxta priorem æquationem erit $\sqrt{b+x}-\sqrt{b}=\sqrt{a+c+x}-\sqrt{a}$. Scribatur e pro $a+c$, & $\sqrt{f}$ pro $\sqrt{a}-\sqrt{b}$: & æquatio fiet $\sqrt{b+x}=\sqrt{e+x}-\sqrt{f}$. Et partibus quadratis $b+x=e+x+f-2\sqrt{ef+fx}$, seu $e+f-b=2\sqrt{ef+fx}$. Pro $e+f-b$ scribe g, & fiet $g=2\sqrt{ef+fx}$, & partibus quadratis $gg=4ef+4fx$, & per reductionem $\frac{gg}{4f}-e=x$. TAB. VII. Fig. 4.

X PROB.

PROB. LIV.

TAB. VII. Fig. 5. *Si duo sint globi A, B, quorum superior A ab altitudine G decidens, in alterum inferiorem B à fundo H versus superiora resilientem incidat, & hi globi ita per reflexionem ab invicem deuno recedant ut globus A vi reflexionis illius ad altitudinem priorem G redeat, idque eodem tempore quo globus inferior B ad fundum H revertitur; dein globus A rursus decidat, & in globum B à fundo resilientem denuo incidat, idque in eodem loco AB ubi prius in ipsum incidebat; & sic perpetuo globi ab invicem resiliant rursusque ad eundem locum redeant: Ex datis globorum magnitudinibus, positione fundi, & loco G à quo globus superior decidit, invenire locum ubi globi in se mutuo impingent.*

Sit e centrum globi A, & f centrum globi B, d centrum loci G in quo globus superior in maxima est altitudine, g centrum loci globi inferioris ubi in fundum impingit, a semidiameter globi A, b semidiameter globi B, c punctum contactus globorum in se mutuo impingentium, & H punctum contactus globi inferioris & fundi. Et celeritas globi A, ubi in globum B impingit, ea erit quæ generatur casu globi ab altitudine de, adeoque est ut $\sqrt{de}$. Hac eadem celeritate reflecti debet globus A versus superiora ut ad locum priorem G redeat. Et globus B eadem celeritate deorsum reflecti debet qua ascenderat ut eodem tempore redeat ad fundum quo inde recesserat. Ut autem hæc duo eveniant, globorum motus inter reflectendum æquales esse debent. Motus autem ex globorum celeritatibus & magnitudinibus componuntur, adeoque quod fit ex globi unius mole & celeritate æquale erit ei quod fit ex globi alterius mole & celeritate. Unde si factum ex unius globi mole & celeritate dividatur per molem alterius globi, habebitur celeritas alterius globi proxime ante & post reflexionem, seu sub fine ascensus & initio descensus. Erit igitur hæc celeritas

ritas ut $\frac{A\sqrt{de}}{B}$, ſeu cum globi ſint ut cubi radiorum ut $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Ut autem hujus celeritatis quadratum ad quadratum celeritatis globi A proxime ante reflexionem, ita altitudo ad quam globus B hac celeritate, ſi occurſu globi A in eum decidentis non impediretur, aſcenderet, ad altitudinem ed à qua globus A deſcendit. Hoc eſt ut $\frac{Aq}{Bq}de$ ad de ſeu ut Aq ad Bq vel a^6 ad b^6 ita altitudo illa prior ad x, ſi modo pro altitudine præteriore ed ponatur x. Ergo hæc altitudo, ad quam nimirum B ſi non impediretur aſcenderet, eſt $\frac{a^6}{b^6}x$. Sit ea fK. Ad fK adde fg, ſeu $dH-de-ef-gH$, hoc eſt $p-x$ ſi modo pro dato $dH-ef-gH$ ſcribas p, & x pro incognito de & habebitur $Kg=\frac{a^6}{b^6}x+p-x$. Unde celeritas globi B ubi decidit à K ad fundum, hoc eſt ubi decidit per ſpatium Kg, quod centrum ejus inter decidendum deſcriberet erit ut $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x+p-x}$. At globus ille decidit à loco Bcf ad fundum eodem tempore quo globus ſuperior A aſcendit à loco Ace ad ſummam altitudinem d, aut viciſſim deſcendit à d ad locum Ace, & proinde cum gravium cadentium celeritates æqualibus temporibus æqualiter augeantur, celeritas globi B deſcendendo ad fundum tantum augebitur quanta eſt celeritas tota quam globus A eodem tempore cadendo à d ad e acquirat vel aſcendendo ab e ad d amittat. Ad celeritatem itaque quam globus B habet in loco Bcf adde celeritatem quam globus A habet in loco Ace, & ſumma, que eſt ut $\sqrt{de}+\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, ſeu $\sqrt{x}+\frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$, erit celeritas globi B ubi is in fundum incidit. Proinde $\sqrt{x}+\frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$ æquabitur $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x+p-x}$. Pro $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ ſcribe $\frac{r}{s}$ & pro $\frac{a^6-b^6}{b^6}$, $\frac{rt}{ss}$ & æquatio illa fiet $\frac{r}{s}\sqrt{x}=\sqrt{\frac{rt}{ss}x+p}$, & partibus quadratis

$\frac{rr}{ss}x = \frac{rt}{ss}x + p$. Aufer utrobique $\frac{rt}{ss}x$, duc omnia in ss ac divide per $rr - rt$, & orietur $x = \frac{ssp}{rr - rt}$. Quæ quidem æquatio prodiisset simplicior si modo assumpsissem $\frac{p}{s}$ pro $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$, prodiisset enim $\frac{ss}{p - t} = x$. Unde faciendo ut sit $p - t$ ad s ut s ad x habebitur x seu ed; cui si addas ec habebitur dc, & punctum c in quo globi in se mutuo impingent. Q. E. F.

PROB. LV.

TAB. VII. Fig. 6. *Erectis alicubi terrarum tribus baculis ad Horizontale planum in punctis A, B, & C perpendicularibus, quorum is qui in A sit sex pedum, qui in B octodecim pedum, & qui in C octo pedum, existente linea AB triginta trium pedum; contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A, transire per puncta B & C, baculi autem B per A & C, ac baculi C per punctum A. Quæritur declinatio solis & elevatio Poli, sive dies locusque ubi hæc evenerint?*

Quoniam umbra baculi cujusque descripsit Conicam sectionem, sectionem nempe Coni radiosi cujus vertex est baculi summitas; fingam BCDEF, esse hujusmodi curvam (sive ea sit Hyperbola, Parabola vel Ellipsis) quam umbra baculi A eo die descripsit, ponendo AD, AE, AF ejus umbras fuisse cum BC, BA, CA respective fuerunt umbræ baculorum B & C. Et præterea fingam PAQ esse lineam Meridionalem sive axem hujus curvæ ad quem demissæ perpendiculares BM, CH, DK, EN, & FL, sunt ordinatim applicatæ. Has vero ordinatim applicatas indefinite designabo litera y, & axis partes interceptas AM, AH, AK, AN, & AL litera x. Fingam denique æquationem $aa + bx + cxx = yy$, ipsarum

rum x & y relationem (*i. e.* naturam Curvæ) designare, assumendo aa, b & c tanquam cognitas ut ex Analysi tandem inveniantur. Ubi incognitas quantitates x & y, duarum tantum dimensionum posui quia æquatio est ad Conicam sectionem; & ipsius y dimensiones impares omisi quia ipsa est ordinatim applicata ad axem. Signa autem ipsorum b & c, quia indeterminata sunt designavi notula $\perp$ quam indifferenter pro $+$ aut $-$ usurpo, & ejus oppositum $\top$ pro signo contrario. At signum quadrati aa affirmativum posui, quia baculum A umbras in adversas plagas (C & F, B & E) projicientem concava pars curvæ necessario complectitur, & proinde si ad punctum A erigatur perpendiculum Aβ, hoc alicubi occurret curvæ puta in β, hoc est, ordinatim applicat y, ubi x nullum est, erit reale. Nam inde sequitur quadratum ejus, quod in eo casu est aa, affirmativum esse.

Constat itaque quod æquatio hæc fictitia $aa \perp bx \perp cxx = yy$, sicut terminis superfluis non referta sic neque restrictor est quam ut ad omnes hujus problematis conditiones se extendat, Hyperbolam, Ellipsin vel Parabolam quamlibet designatura prout ipsorum aa, b, c, valores determinabuntur, aut nulli forte reperientur. Quid autem valent, quibusque signis b & c debent affici, & inde quænam sit hæc curva ex sequenti Analysi constabit.

Analyseos pars prior.

Cum umbræ sint ut altitudines baculorum erit BC.AD :: AB.AE (:: 18.6.) :: 3.1. Item CA.AF (:: 8.6.) :: 4.3. Quare nominatis AM $= r$, MB $= s$, AH $= t$, & HC $= \perp v$. Ex similitudine triangulorum AMB, ANE, & AHC, ALF erunt AN $= -\frac{r}{3}$. NE $= -\frac{s}{3}$. AL $= -\frac{3t}{4}$. Et LF $= \top\frac{3v}{4}$: Quarum signa signis ipsarum AM, MB, AH, HC contraria posui quia tendunt ad contrarias plagas respectu puncti A à quo ducuntur, axisve PQ cui insistunt. His autem pro x & y in æquatione fictitia $aa \perp bx \perp cxx = yy$, respective scriptis,

r & s dabunt $aa \pm br \pm crr = ss$.
$-\frac{r}{3}$ & $-\frac{s}{3}$ dabunt $aa \mp \frac{br}{3} \pm \frac{1}{9}crr = \frac{1}{9}ss$.
t & $\pm v$ dabunt $aa \pm bt \pm ctt = vv$.
$-\frac{3}{4}t$ & $\mp\frac{3}{4}v$ dabunt $aa \mp \frac{3}{4}bt \pm \frac{9}{16}ctt = \frac{9}{16}vv$.

Jam è prima & secunda harum exterminando ss ut obtineatur r, prodit $\frac{2aa}{\pm b} = r$. Unde patet $\pm b$ esse affirmativum. Item è tertia & quarta exterminando vv ut obtineatur t prodit $\frac{aa}{3b} = t$. Et scriptis insuper $\frac{2aa}{b}$ pro r in prima, & $\frac{aa}{3b}$ pro t in tertia, oriuntur $3aa \pm \frac{4a^4c}{bb} = ss$, & $\frac{4}{3}aa \pm \frac{a^4c}{9bb} = vv$.

Porro demissa $B\lambda$ perpendiculari in CH, erit $BC.AD$ (:: 3. 1.) :: $B\lambda$. AK :: $C\lambda$. DK. Quare cum sit $B\lambda$ ($= AM - AH = r - t$) $= \frac{5aa}{3b}$, erit $AK = \frac{5aa}{9b}$, vel potius $= -\frac{5aa}{9b}$. Item cum sit $C\lambda$ ($= CH \pm BM = v \pm s$) $= \sqrt{\frac{4aa}{3} \pm \frac{a^4c}{9bb}} \pm \sqrt{3aa \pm \frac{4a^4c}{bb}}$, erit DK ($= \frac{1}{3}C\lambda$) $= \sqrt{\frac{4aa}{27} \pm \frac{a^4c}{81bb}} \pm \sqrt{\frac{1}{3}aa \pm \frac{4a^4c}{9bb}}$. Quibus in æquatione $aa + bx \pm cxx = yy$, pro AK ac DK sive x, & y respective scriptis, prodit $\frac{4aa}{9} \pm \frac{25a^4c}{81bb} = \frac{13}{27}aa \pm \frac{37a^4c}{81bb} \pm 2\sqrt{\frac{4aa}{27} \pm \frac{a^4c}{81bb}} \times \sqrt{\frac{aa}{3} \pm \frac{4a^4c}{9bb}}$. Et per reductionem $-bb \mp 4aac = \pm 2\sqrt{36b^4 \pm 51aabbc + 4a^4cc}$, & partibus quadratis iterumque reductis, exit $0 = 143b^4 \pm 196aabbc$, sive $\frac{-143bb}{196aa} = \pm c$. Unde constat $\pm c$ negativam esse, adeoque æquationem fictitiam $aa \pm bx \pm cxx = yy$, hujus esse formæ $aa + bx - cxx = yy$, & ideo curvam quam

quam designat Ellipsin esse. Ejus vero centrum & axes duo sic eruuntur.

Ponendo $y=0$, sicut in Figuræ verticibus P & Q contingit, habebitur $aa+bx=cxx$, & extracta radice, $x=\frac{b}{2c}\pm\sqrt{\frac{bb}{4cc}+\frac{aa}{c}}=\frac{AQ}{AP}$. Adeoque sumpto $AV=\frac{b}{2c}$, erit V centrum Ellipsis, & VQ vel VP$(\sqrt{\frac{bb}{4cc}+\frac{aa}{c}})$ semiaxis maximus. Si porro ipsius AV valor $\frac{b}{2c}$ pro x in æquatione $aa+bx-cxx=yy$ scribatur, fiet $aa+\frac{bb}{4c}=yy$. Quare est $aa+\frac{bb}{4c}=VZq$, hoc est quadrato semiaxis minimi. Denique in valoribus ipsarum AV, VQ, VZ jam inventis, scripto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c, exeunt $\frac{98aa}{143b}=AV$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}=VQ$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}=VZ$.

Analyseos pars altera.

Supponatur jam baculum puncto A insistens esse AR, & erit RPQ planum meridionale ac RPZQ conus radiosus cujus vertex est R. Sit insuper TXZ planum secans Horizontem in VZ, ut & meridionale planum in TVX, quæ sectio sit ad axem mundi conive perpendicularis, & ipsum planum TXZ erit ad eundem axem perpendiculare, & conum secabit in peripheria circuli TZX, quæ ab ejus vertice pari ubique intervallo RX, RZ, RT distabit. Quamobrem si PS ipsi TX parallela ducatur, fiet $RS=RP$ propter æquales RX, RT; nec non $SX=XQ$ propter æquales PV, VQ. Unde est RX vel $RZ(=\frac{RS+RQ}{2})=\frac{RP+RQ}{2}$. Denique ducatur RV, & cum VZ perpendiculariter insistat plano RPQ, (sectio utique existens planorum eidem perpendiculariter insistentium) fiet triangulum RVZ rectangulum ad V. TAB. VII. Fig. 7.

Dictis

Dictis jam $RA=d$, $AV=e$, VP vel $VQ=f$, & $VZ=g$, erit $AP=f-e$, & $RP=\sqrt{ff-2ef+ee+dd}$. Item $AQ=f+e$, & $RQ=\sqrt{ff+2ef+ee+dd}$: adeoque $RZ\ (=\frac{RP+RQ}{2})$ $=\frac{\sqrt{ff-2ef+ee+dd}+\sqrt{ff+2ef+ee+dd}}{2}$. Cujus quadratum $\frac{dd+ee+ff}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{f^4-2eeff+e^4+2ddff+2ddee+d^4}$, est æquale $(RVq+VZq=RAq+AVq+VZq=)\ dd+ee+gg$. Jam reductione facta est $\sqrt{f^4-2eeff+e^4+2ddff+2ddee+d^4}=dd+ee-ff+2gg$, & partibus quadratis ac in ordinem redactis, $ddff=ddgg+eegg-ffgg+g^4$, sive $\frac{ddff}{gg}=dd+ee-ff+gg$. Denique 6, $\frac{98aa}{143b}$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ (valoribus ipsorum AR, AV, VQ, & VZ,) pro d, e, f, ac g restitutis, oritur $36-\frac{196a^4}{143bb}+\frac{192aa}{143}=\frac{36\times14\times14aa}{143bb}$, & inde per reductionem $\frac{49a^4+36\times49aa}{48aa+1287}=bb$.

In Fig. 6. est $AMq+MBq=ABq$, hoc est $rr+ss=33\times33$. Erat autem $r=\frac{2aa}{b}$, & $ss=3aa-\frac{4a^4c}{bb}$, unde $rr=\frac{4a^4}{bb}$, & (substituto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c) $ss=\frac{4aa}{49}$ Quare $\frac{4a^4}{bb}+\frac{4aa}{49}=33\times33$, & inde per reductionem iterum resultat $\frac{4\times49a^4}{53361-4aa}=bb$. Ponendo igitur æqualitatem inter duo bb, & dividendo utramque partem æquationis per 49 fit $\frac{a^4+36aa}{48aa+1287}=\frac{4a^4}{53361-4aa}$. Cujus partibus in crucem multiplicatis, ordinatis, ac divisis per 49, exit $4a^4=981aa+39204$ cujus radix aa est $\frac{981+\sqrt{1589625}}{8}=280,2254144$.

Supra

Supra inventum fuit $\frac{4 \times 49 a^4}{53361 - 4aa} = bb$, five $\frac{14aa}{\sqrt{53361 - 4aa}} = b$.

Unde AV $(\frac{98aa}{143b})$ eft $\frac{7\sqrt{53361 - 4aa}}{143}$, & VP vel VQ $(\frac{112aa\sqrt{3}}{143b})$ eft $\frac{8}{143}\sqrt{160083 - 12aa}$. Hoc eft fubftituendo 280⌊2254144 pro aa, ac terminos in decimales numeros reducendo, AV = 11⌊188297, & VP vel VQ = 22⌊147085. Adeoque AP (PV − AV) = 10⌊958788, & AQ (AV + VQ) 33⌊335382.

Denique fi ¼ AR five 1 ponatur Radius, erit ¼ AQ five 5⌊555897. tangens anguli ARQ 79 gr. 47′. 48″, & ¼ AP five 1⌊826465 tangens anguli ARP 61 gr. 17′. 57″. Quorum angulorum femifumma 70 gr. 32′. 52″, eft complementum declinationis Solis; & femidifferentia 9 gr. 14′. 56″, complementum latitudinis Loci. Proinde declinatio folis erat 19 gr. 27′. 8″, & Latitudo loci 80 gr. 45′. 4″. Quæ erant invenienda.

PROB. LVI.

E Cometæ motu uniformi rectilineo per Cœlum trajicientis locis quatuor obfervatis, diftantiam à Terra, motufque determinationem, in Hypothefi Copernicæa colligere.

Si è centro Cometæ in locis quatuor obfervatis, ad planum Eclipticæ demittantur totidem perpendicula; fintque A, B, C, D. puncta in plano illo in quæ perpendicula incidunt; Per puncta illa agatur recta AD, & hæc fecabitur à perpendiculis in eadem ratione cum linea quam Cometa motu fuo defcribit, hoc eft, ita ut fit AB ad AC ut tempus inter primam & fecundam obfervationem ad tempus inter primam ac tertiam, & AB ad AD ut tempus illud inter primam & fecundam obfervationem ad tempus inter primam & quartam. Ex obfervationibus itaque dantur rationes linearum AB, AC, AD, ad invicem. TAB. VII. Fig. 8.

Infuper in eodem Eclipticæ plano fit S Sol, EH arcus lineæ

Eclipticæ in qua terra movetur, E, F, G, H loca quatuor terræ temporibus observationum, E locus primus, F secundus, G tertius, H quartus. Jungantur AE, BF, CG, DH, & producantur donec tres posteriores priorem secent in I, K & L, BF in I, CG in K, DH in L. Et erunt anguli AIB, AKC, ALD differentiæ longitudinum observatarum Cometæ; AIB differentia longitudinum loci primi Cometæ & secundi; AKC differentia longitudinum loci primi ac tertii; & ALD differentia longitudinum loci primi & quarti. Dantur itaque ex observationibus anguli AIB, AKC, ALD.

Junge SE, SF, EF; & ob data puncta S, E, F, datumque angulum ESF, dabitur angulus SEF. Datur etiam angulus SEA, utpote differentia longitudinis Cometæ & Solis tempore observationis primæ. Quare si complementum ejus ad duos rectos nempe angulum SEI, addas angulo SEF, dabitur angulus IEF. Trianguli igitur IEF dantur anguli una cum latere EF, adeoque datur etiam latus IE. Et simili argumento dantur KE & LE. Dantur igitur positione lineæ quatuor AI, BI, CK, DL, adeoque Problema huc redit, ut lineis quatuor positione datis, quintam inveniamus quæ ab his in data ratione secabitur.

Demissis ad AI perpendiculis BM, CN, DO, ob datum angulum AIB datur ratio BM ad MI. Est & BM ad CN in data ratione BA ad CA, & ob datum angulum CKN datur ratio CN ad KN. Quare datur etiam ratio BM ad KN; & inde ratio quoque BM ad $MI-KN$, hoc est ad $MN+IK$. Cape P ad IK ut est AB ad BC, & cum sit MA ad MN in eadem ratione, erit etiam $P+MA$ ad $IK+MN$ in eadem ratione; hoc est in ratione data. Quare datur ratio BM ad $P+MA$. Et simili argumento si capiatur Q ad IL in ratione AB ad BD, dabitur ratio BM ad $Q+MA$. Et proinde ratio BM ad ipsorum $P+MA$ & $Q+MA$ differentiam, quoque dabitur. At differentia illa, nempe $P-Q$ vel $Q-P$, datur. Et proinde dabitur BM. Dato autem BM, simul dantur $P+MA$, & MI, & inde MA, ME, AE, & angulus EAB.

His inventis, erige ad A lineam plano Eclipticæ perpendicula- rem,

rem, quæ ſit ad lineam EA ut tangens latitudinis Cometæ in obſervatione prima ad radium, & iſtius perpendicularis terminus erit locus centri Cometæ in obſervatione prima. Unde datur diſtantia Cometæ à Terra tempore illius obſervationis. Et eodem modo ſi è puncto B erigatur perpendicularis quæ ſit ad lineam BF ut tangens latitudinis Cometæ in obſervatione ſecunda ad radium, habebitur locus centri Cometæ in obſervatione illa ſecunda. Et acta linea à loco primo ad locum ſecundum, ea eſt in qua Cometa per Cœlum trajicit.

PROB. LVII.

Si angulus datus CAD circa punctum angulare A, poſitione datum, & angulus datus CBD circa punctum angulare B, poſitione datum, ea lege circumvolvantur ut crura AD, BD ad rectam poſitione datam EF ſeſe ſemper interſecent: Invenire lineam illam curvam quam reliquorum crurum AC, BC interſectio C deſcribit. TAB. VIII. Fig. 1.

Produc CA ad d ut ſit $Ad=AD$, & CB ad δ ut ſit $B\delta=BD$. Fac angulum Ade æqualem angulo ADE, & angulum $B\delta f$ æqualem angulo BDF, & produc AB utrinque donec ea occurrat de & δf in e & f. Produc etiam ed ad G, ut ſit $dG=\delta f$, & à puncto C ad lineam AB ipſi ed parallelam age CH, & ipſi $f\delta$ parallelam CK. Et concipiendo lineas eG, $f\delta$ immobiles manere dum anguli CAD, CBD lege præſcripta circa polos A & B volvantur, ſemper erit Gd æqualis ipſi $f\delta$, & triangulum CHK dabitur ſpecie. Dic itaque $Ae=a$, $eG=b$, $Bf=c$, $AB=m$, $BK=x$, & $CK=y$. Et erit $BK.CK::Bf.f\delta$. Ergo $f\delta=\frac{cy}{x}=Gd$. Aufer hoc de Ge, & reſtabit $ed=b-\frac{cy}{x}$. Cum detur ſpecie triangulum CKH, pone $CK.CH::d.e$; & $CH.HK::e.f$, & erit

CH

$CH = \frac{ey}{d}$, & $HK = \frac{fy}{d}$. Adeoque $AH = m - x - \frac{fy}{d}$. Est autem $AH . HC :: Ae . ed$, hoc est $m - x - \frac{f}{d}y . \frac{ey}{d} :: a . b - \frac{cy}{x}$. Ergo ducendo media & extrema in se, fiet $mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy - \frac{bf}{d}y + \frac{cfyy}{dx} = \frac{aey}{d}$. Duc omnes terminos in dx, eosque in ordinem redige; & fiet $fcyy \begin{matrix} +dc \\ -ae \\ -fb \end{matrix} xy - dcmy - bdxx + bdmx = 0$. Ubi cum incognitæ quantitates x & y, ad duas tantum dimensiones ascendant, patet curvam lineam quam punctum C describit esse Conicam Sectionem. Pone $\frac{ae + fb - dc}{c} = 2p$, & fiet $yy = \frac{2p}{f}xy + \frac{dm}{f}y + \frac{bd}{fc}xx - \frac{bdm}{fc}x$. Et extracta radice $y = \frac{p}{f}x + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{\frac{pp}{ff}xx + \frac{bd}{fc}xx + \frac{pdm}{ff}x - \frac{bdm}{fc}x + \frac{ddmm}{4ff}}$. Unde colligitur Curvam Hyperbolam esse si sit $\frac{bd}{fc}$ affirmativum, vel negativum & minus quam $\frac{pp}{ff}$; Parabolam si sit $\frac{bd}{fc}$ negativum & æquale $\frac{pp}{ff}$; Ellipsin vel circulum si sit $\frac{bd}{fc}$ & negativum & majus quam $\frac{pp}{ff}$. Q. E. I.

PROB.

PROB. LVIII.

Parabolam describere quæ per data quatuor puncta transibit.

Sint puncta illa data A, B, C, D. Junge AB & eam biseca in E. Et per E age rectam aliquam VE, quam concipe diametrum esse Parabolæ, puncto V existente vertice ejus. Junge AC ipsique AB parallelam age DG occurrentem AC in G. Dic $AB=a$, $AC=b$, $AG=c$, $GD=d$. In AC cape AP cujusvis longitudinis & à P age PQ parallelam AB, & concipiendo Q punctum esse Parabolæ; dic $AP=x$, $PQ=y$, & æquationem quamvis ad Parabolam assume quæ relationem inter AP & PQ exprimat. Ut quod sit Tab. VIII. Fig. 2.

$y=e+fx \pm \sqrt{gg+hx}$.

Jam si ponatur AP sive $x=0$, puncto P incidente in ipsum A, fiet PQ sive $y=0$, ut & $=-AB$. Scribendo autem in æquatione assumpta o pro x, fiet $y=e \pm \sqrt{gg}$, hoc est $=e \pm g$. Quorum valorum ipsius y major $e+g$ est $=0$, minor $e-g=-AB$ sive $-a$. Ergo $e=-g$ & $e-g$, hoc est $-2g=-a$, sive $g=\frac{1}{2}a$. Atque adeo vice æquationis assumptæ habebitur hæc $y=-\frac{1}{2}a+fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa+hx}$.

Adhæc si ponatur AP sive $x=AC$ ita ut punctum P incidat in C, fiet iterum $PQ=0$. Pro x igitur in æquatione novissima scribe AC sive b, & pro y, o, & fiet $0=-\frac{1}{2}a+fb+\sqrt{\frac{1}{4}aa+hb}$, sive $\frac{1}{2}a-fb=\sqrt{\frac{1}{4}aa+hb}$; & partibus quadratis $-afb+ffbb=hb$. Sive $ffb-fa=h$. Atque ita vice assumptæ æquationis habebitur isthæc $y=-\frac{1}{2}a+fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbx-fax}$.

Insuper si ponatur AP sive $x=AG$ sive c, fiet PQ sive $y=-GD$ sive $-d$. Quare pro x & y in æquatione novissima scribe c & $-d$, & fiet $-d=-\frac{1}{2}a+fc-\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbc-fac}$. Sive $\frac{1}{2}a-d-fc=\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbc-fac}$. Et partibus quadratis $-ad-fac+dd$

$+2dcf+ccff=ffbc-fac$. Et æquatione ordinata & reducta $ff=\frac{2d}{b-c}f+\frac{dd-ad}{bc-cc}$. Pro $b-c$ hoc est pro GC scribe k, & æquatio illa fiet $ff=\frac{2d}{k}f+\frac{dd-ad}{kc}$. Et extracta radice $f=\frac{d}{k}\pm\sqrt{\frac{ddc+ddk-adk}{kkc}}$. Invento autem f, æquatio ad Parabolam, viz. $y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbx-fax}$, plene determinatur: Cujus itaque constructione Parabola etiam determinabitur. Constructio autem ejus hujusmodi est. Ipsi BD parallelam age CH occurrentem DG in H. Inter DG ac DH cape mediam proportionalem DK, & ipsi CK parallelam age EI bisecantem AB in E, & occurrentem DG in I. Dein produc IE ad V, ut sit $EV.EI::EBq.DIq-EBq$, & erit V vertex, VE diameter, & $\frac{BEq}{VE}$ latus rectum Parabolæ quæsitæ.

PROB. LIX.

Conicam sectionem per data quinque puncta describere.

TAB. VIII. Fig. 3.

Sint puncta ista A, B, C, D, E. Junge AC, BE se mutuo secantes in H. Age DI parallelam BE, & occurrentem AC in I. Item EK parallelam AC, & occurrentem DI productæ in K. Produc ID ad F, & EK ad G; ut sit $AHC.BHE::AIC.FID::EKG.FKD$, & erunt puncta F ac G in conica sectione, ut notum est. Hoc tamen observare debebis, quod si punctum H cadit inter puncta omnia A, C & B, E, vel extra ea omnia, punctum I cadere debebit vel inter puncta omnia A, C & F, D, vel extra ea omnia; & punctum K inter omnia D, F & E, G, vel extra ea omnia. At si punctum H cadit inter duo puncta A, C, & extra alia duo B, E vel inter illa duo B, E, & extra altera duo A, C, debebit punctum I cadere inter duo punctorum A, C & F, D, & extra alia duo eorum; & similiter punctum K debebit cadere

dere inter duo punctorum D, F & E, G, & extra alia duo eorum: Id quod fiet capiendo IF, KG, ad hanc vel illam partem punctorum I, K, pro exigentia problematis. Inventis punctis F ac G, biseca AC, EG in N & O; item BE, FD in L & M. Junge NO, LM se mutuo secantes in R; & erunt LM & NO diametri conicæ sectionis, R centrum ejus, & BL, FM ordinatim applicatæ ad diametrum LM. Produc LM hinc inde si opus est ad P & Q ita ut sit $BLq.FMq::PLQ.PMQ$, & erunt P & Q vertices Conicæ sectionis & PQ latus transversum. Fac $PLQ.LBq::PQ.T$. Et erit T latus rectum. Quibus cognitis cognoscitur Figura.

Restat tantum ut doceamus quomodo LM hinc inde producenda sit ad P & Q ita ut fiat $BLq.FMq::PLQ.PMQ$. Nempe PLQ sive $PL\times LQ$ est $\overline{PR-LR}\times\overline{PR+LR}$, nam PL est $PR-LR$, & LQ est $RQ+LR$ seu $PR+LR$. Porro $\overline{PR-LR}\times\overline{PR+LR}$ multiplicando fit $PRq-LRq$. Et ad eundem modum PMQ est $\overline{PR+RM}\times\overline{PR-RM}$, seu $PRq-RMq$. Ergo $BLq.FMq::PRq-LRq.PRq-RMq$, & dividendo $BLq-FMq.FMq::RMq-LRq.PRq-RMq$. Quamobrem cum dentur $BLq-FMq$, FMq, & $RMq-LRq$ dabitur $PRq-RMq$. Adde datum RMq, & dabitur summa PRq, adeoque & latus ejus PR, cui QR æqualis est.

PROB. LX.

Conicam sectionem describere quæ transibit per quatuor data puncta, & in uno istorum punctorum continget rectam positione datam.

Sint puncta quatuor data A, B, C, D, & recta positione data AE, quam conica sectio contingat in puncto A. Junge duo quævis puncta D, C, & DC, producta si opus est, occurrat tangenti in E. Per quartum punctum B ipsi DC age parallelam BF, quæ occurrat eidem tangenti in F. Item tangenti parallelam age DI, quæ occurrat ipsi BF in I. In FB, DI, si opus est productis, cape

TAB. VIII. Fig. 4.

cape FG, HI ejus longitudinis ut sit $AEq.CED::AFq.BFG::DIH.BIG$. Et erunt puncta G & H in Conica sectione, ut notum est: Si modo capias FG, IH ad legitimas partes punctorum F & I, juxta regulam in superiore Problemate traditam. Biseca BG, DC, DH in K, L & M. Junge KL, AM se mutuo secantes in O, & erit O centrum, A vertex, & HM ordinatim applicata ad semidiametrum AO. Quibus cognitis cognoscitur figura.

PROB. LXI.

Conicam sectionem describere quæ transibit per tria data puncta, & in duobus istorum punctorum continget rectas positione datas.

TAB. VIII. Fig. 5.

Sint puncta illa data A, B, C, Tangentes AD, BD ad puncta A & B, D communis intersectio tangentium. Bisceca AB in E. Age DE, & produc eam donec in F occurrat CF actæ parallelæ AB: & erit DF diameter, & AE, CF ordinatim applicatæ ad diametrum. Produc DF ad O, & in DO cape OV mediam proportionalem inter DO & EO ea lege ut sit etiam $AEq.CFq::VE\times\overline{VO+OE}.VF\times\overline{VO+OF}$; & erit V vertex, & O centrum Figuræ. Quibus cognitis Figura simul cognoscitur. Est autem $VE=VO-OE$, adeoque $VE\times\overline{VO+OE}=\overline{VO-OE}\times\overline{VO+OE}=VOq-OEq$. Præterea quia VO media proportionalis est inter DO & EO erit $VOq=DOE$, adeoque $VOq-OEq=DOE-OEq=DEO$. Et simili argumento erit $VF\times\overline{VO+OF}=VOq-OFq=DOE-OFq$. Ergo $AEq.CFq::DEO.DOE-OFq$. Est $OFq=EOq-2FEO+FEq$ Adeoque $DOE-OFq=DOE-OEq+2FEO-FEq=DEO+2FEO-FEq$. Et $AEq.CFq::DEO.DEO+2FEO-FEq::DE.DE+2FE-\frac{FEq}{EO}$. Datur ergo $DE+2FE-\frac{FEq}{EO}$. Aufer hoc de dato $DE+2FE$, & restabit

bit $\frac{FEq}{EO}$ datum. Sit illud N; & erit $\frac{FEq}{N} = EO$, adeoque datur EO. Dato autem EO simul datur VO medium proportionale inter DO & EO.

Hoc modo per Theoremata quædam Apollonii satis expedite resolvuntur hæc problemata: Quæ tamen sine istis Theorematibus per Algebram solam resolvi possent. Ut si proponatur primum trium novissimorum Problematum: Sint puncta quinque data A, B, C, D, E, per quæ Conica sectio transire debet. Junge duo quævis AC, & alia duo BE rectis se secantibus in H. Ipsi BE parallelam age DI occurrentem AC in I; ut & aliam quamvis rectam KL occurrentem AC in K, & conicæ sectioni in L. Et finge Conicam sectionem datam esse, ita ut cognito puncto K simul cognoscatur punctum L. Et posito $AK = x$, & $KL = y$, ad exprimendam relationem inter x & y, assume quamvis æquationem quæ Conicas sectiones generaliter exprimit, puta hanc $a + bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, ubi a, b, c, d, e denotant quantitates determinatas cum signis suis, x vero & y quantitates indeterminatas. Si jam quantitates determinatas a, b, c, d, e invenire possumus, habebimus Conicam sectionem. Fingamus ergo punctum L successive incidere in puncta A, C, B, E, D, & videamus quid inde sequetur. Si ergo punctum L incidit in punctum A, erit in eo casu AK & KL, hoc est x & y nihil. Proinde æquationis omnes termini præter a evanescent, & restabit $a = 0$. Quare delendum est a in æquatione illa, & cæteri termini $bx + cxx + dy + exy + yy$ erunt $= 0$. Porro si L incidit in C erit AK seu $x = AC$, & LK seu $y = 0$. Pone ergo $AC = f$, & substituendo f pro x, & o pro y æquatio ad curvam $bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, evadet $bf + cff = 0$, seu $b = -cf$. Et in æquatione illa scripto $-cf$ pro b evadet $-cfx + cxx + dy + exy + yy = 0$. Adhæc si punctum L incidit in punctum B, erit AK seu $x = AH$, & KL seu $y = BH$. Pone ergo $AH = g$ & $BH = h$, & perinde scribe g pro x & h pro y, & æquatio $-cfx + cxx$, &c. evadet $-cfg + cgg + dh + egh + hh = 0$. Quod si punctum L incidit in E erit $AK = AH$ seu $x = g$, & KL seu $y = HE$. Pro HE. ergo scribe $-k$ cum signo negativo quia HE jacet ad contrarias par- Tab. VIII. Fig. 6.

 tes

tes lineæ AC, & substituendo g pro x & $-k$ pro y, æquatio $-cfx+cxx$; &c evadet $-cfg+cgg-dk-egk+kk=0$. Aufer hoc de superiori æquatione $-cfg+cgg+dh+egh+hh$, & restabit $dh+egh+hh+dk+egk-kk=0$. Divide hoc per $h+k$, & fiet $d+eg+h-k=0$. Hoc ductum in h aufer de $-cfg+cgg+dh+egh+hh=0$, & restabit $-cfg+cgg+hk=0$, seu $\frac{hk}{-gg+fg}=c$. Denique si punctum L incidit in punctum D, erit AK seu $x=$AI, & KL seu $y=$ID. Quare pro AI scribe m & pro ID n, & perinde pro x & y substitue m & n, & æquatio $-cfx+cxx$, &c evadet $-cfm+cmm+dn+emn+nn=0$. Hoc divide per n & fiet $\frac{-cfm+cmm}{n}+d+em+n=0$. Aufer $d+eg+h-k=0$, & restabit $\frac{-cfm+cmm}{n}+em-eg+n-h+k=0$. Sive $\frac{cmm-cfm}{n}+n-h+k=eg-em$. Jam vero ob data puncta A, B, C, D, E dantur AC, AH, AI, BH, EH, DI, hoc est f, g, m, h, k, n. Atque adeo per æquationem $\frac{hk}{fg-gg}=c$ datur c. Dato autem c, per æquationem $\frac{cmm-cfm}{n}+n-h+k=eg-em$ datur $eg-em$. Divide hoc datum per datum $g-m$, & emerget datum e. Quibus inventis æquatio $d+eg+h-k=0$, seu $d=k-h-eg$ dabit d. Et his cognitis simul determinatur æquatio ad quæsitam Conicam sectionem $cfx=cxx+dy+exy+yy$. Et ex ea æquatione per methodum Cartesii determinabitur Conica sectio.

Quod si quatuor A, B, C, E, & positio rectæ AF quæ tangit Conicam sectionem ad unum istorum punctorum A daretur, posset Conica sectio sic facilius determinari. Inventis ut supra æquationibus $cfx=cxx+dy+exy+yy$, $d=k-h-eg$, & $c=\frac{hk}{fg-gg}$, concipe tangentem AF occurrere rectæ EH in F, dein punctum L moveri per perimetrum figuræ CDE donec incidat in punctum A: & ultima ratio ipsius LK ad AK erit ratio FH ad AH, ut con-

tem-

templanti figuram constare potest. Dic vero $FH=p$, & in hoc casu ubi LK est ad AK in ultima ratione erit $p.g::y,x$, sive $\frac{gy}{p}=x$. Quare pro x in æquatione $cfx=cxx+dy+exy+yy$, scribe $\frac{gy}{p}$, & orietur $\frac{cfgy}{p}=\frac{cggyy}{pp}+dy+\frac{egyy}{p}+yy$. Divide omnia per y & emerget $\frac{cfg}{p}=\frac{cggy}{pp}+d+\frac{egy}{p}+y$. Jam quia supponitur punctum L incidere in punctum A, adeoque KL seu y infinite parvum vel nihil esse, dele terminos qui per y multiplicantur, & restabit $\frac{cfg}{p}=d$. Quare fac $\frac{bk}{fg-gg}=c$ dein $\frac{cfg}{p}=d$, denique $\frac{k-b-d}{g}=e$, & inventis c, d, & e, æquatio $cfx=cxx+dy+exy+yy$ determinabit conicam sectionem.

Si denique tria tantum puncta A, B, C dentur, una cum positione duarum rectarum AT, CT quæ tangunt Conicam sectionem in duobus istorum punctorum A & C, obtinebitur ut supra ad Conicam sectionem æquatio hæc $cfx=cxx+dy+exy+yy$. Deinde si supponatur ordinatam KL parallelam esse tangenti AT, & concipiatur eam produci donec rursus occurrat Conicæ sectioni in M, & lineam illam LM accedere ad tangentem AT donec cum ea conveniat ad A; ultima ratio linearum KL & KM ad invicem erit ratio æqualitatis, ut contemplanti figuram constare potest. Quamobrem in illo casu existentibus KL & KM, sibi invicem æqualibus, hoc est duobus valoribus ipsius y (affirmativo scilicet KL, & negativo KM) æqualibus, debent æquationis $cfx=cxx+dy+exy+yy$ termini illi in quibus y est imparis dimensionis, hoc est termini $+dy+exy$ respectu termini yy in quo y est paris dimensionis, evanescere. Aliter enim duo valores ipsius y, affirmativus & negativus, æquales esse non possunt. Et in illo quidem casu AK infinite minor erit quam LK, hoc est x quam y, proinde & terminus exy quam terminus yy. Atque adeo infinite minor existens, pro nihilo habendus erit. At terminus dy respectu termini yy, non evanescet ut oportet, sed eo major erit nisi

TAB. VIII. Fig. 7

d supponatur esse nihil. Delendus est itaque terminus dy, & sic restabit $cfx = cxx + exy + yy$, æquatio ad conicam sectionem. Concipiantur jam tangentes AT, CT sibi mutuo occurrere in T, & punctum L accedere ad punctum C donec in illud incidat. Et ultima ratio ipsius KL ad KC erit AT ad AC. KL erat y; AK, x; & AC, f; atque adeo KC, $f - x$. Dic AT $= g$, & ultima ratio y ad $f - x$, erit ea quæ est g ad f. Æquatio $cfx = cxx + exy + yy$, subducto utrobique cxx fit $cfx - cxx = exy + yy$, hoc est, $\overline{f - x}$ in $cx = y$ in $\overline{ex + y}$. Ergo est $y . f - x :: cx . ex + y$, adeoque $g . f :: cx . ex + y$. At puncto L incidente in C, fit y nihil. Ergo $g . f :: cx . ex$. Divide posteriorem rationem per x, & evadet $g . f :: c . e$, & $\frac{cf}{g} = e$. Quare si in æquatione $cfx = cxx + exy + yy$, scribas $\frac{cf}{g}$ pro e, fiet $cfx = cxx + \frac{cf}{g} xy + yy$, æquatio ad conicam sectionem. Denique ipsi KL seu AT à dato puncto B per quod Conica sectio transire debet age parallelam BH occurrentem AC in H, & concipiendo LK accedere ad BH donec cum ea coincidat, in eo casu erit AH $= x$, & BH $= y$. Dic ergo datam AH $= m$, & datam BH $= n$, & perinde pro x & y in æquatione $cfx = cxx + \frac{cf}{g} xy + yy$, scribe m & n, & orietur $cfm = cmm + \frac{cf}{g} mn + nn$. Aufer utrobique $cmm + \frac{cf}{g} mn$, & fiet $cfm - cmm - \frac{cf}{g} mn = nn$. Pone $f - m - \frac{fn}{g} = s$, & erit $csm = nn$. Divide utramque partem æquationis per sm, & orietur $c = \frac{nn}{sm}$. Invento autem c, determinata habetur æquatio ad Conicam sectionem $cfx = cxx + \frac{cf}{g} xy + yy$. Et inde per methodum Cartesii Conica sectio datur & describi potest.

Atque

Atque hactenus varia evolvi Problemata. In scientiis enim addiscendis prosunt exempla magis quam præcepta. Qua de causa in his fusius expatiatus sum. Sed & aliqua quæ inter scribendum occurrebant immiscui sine Algebra soluta, ut insinuarem in problematibus, quæ prima fronte difficilia videntur, non semper ad Algebram recurrendum esse. Sed tempus est jam æquationum resolutionem docere. Nam postquam Problema ad æquationem deductum est, radices illius æquationis quæ quantitates sunt Problemati satisfacientes extrahere oportebit.

Quomodo Æquationes resolvendæ sunt.

Postquam igitur in Quæstionis alicujus solutione ad æquationem perventum est, & æquatio illa debite ordinata est & reducta; ubi quantitates quæ per species designantur & pro datis habentur, revera dantur in numeris, pro ipsis substituendi sunt numeri illi in æquatione, & habebitur æquatio numeralis, cujus radix extracta tandem satisfaciet Quæstioni. Ut si in sectione anguli in quinque partes æquales sumendo r pro radio circuli, q pro subtensa complementi anguli propositi ad duos rectos, & x pro subtensa complementi quintæ partis anguli illius pervenissem ad hanc æquationem $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x - r^4q = 0$. Ubi in casu aliquo particulari dantur in numeris radius r, & linea dati anguli complementum subtendens q; ut quod radius sit 10 & subtensa 3; substituo numeros illos in æquatione pro r & q, & provenit æquatio numeralis $x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0$, cujus radix tandem extracta erit x, seu linea complementum quintæ partis anguli illius dati subtendens.

De Natura Radicum Æquationis.

Radix vero numerus est qui si in æquatione pro litera vel specie radicem significante substituatur, efficiet omnes terminos evanescere. Sic æquationis $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, unitas est radix quoniam scripta pro x producit $1 - 1 - 19 + 49 - 30$, hoc est nihil. Sed æquationis ejusdem plures esse possunt radices. Nam si in hac eadem

æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, pro x ſcribas numerum 2, & pro poteſtatibus x ſimiles poteſtates numeri 2, producetur $16 - 8 - 76 + 98 - 30$, hoc eſt nihil. Atque ita ſi pro x ſcribas numerum 3 vel numerum negativum -5, utroque caſu producetur nihil, terminis affirmativis & negativis in hiſce quatuor caſibus ſe mutuo deſtruentibus. Proinde cum numerorum 1, 2, 3, & -5, quilibet ſcriptus in æquatione pro x impleat conditionem ipſius x, efficiendo ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur nihilo, erit quilibet eorum radix æquationis.

Et ne mireris eandem æquationem habere poſſe *plures radices*, ſciendum eſt *plures eſſe poſſe ſolutiones ejuſdem Problematis.*

Ut ſi circulorum duorum datorum quæreretur *interſectio*; *duæ* ſunt eorum interſectiones, atque adeo quæſtio admittit *duo reſponſa*; & perinde æquatio interſectionem determinans habebit *duas radices* quibus interſectionem utramque determinet, *ſi modo nihil in datis ſit quo reſponſum ad unam interſectionem determinetur.*

TAB. VIII. Fig. 8. Sic & ſi arcus APB pars quinta AP invenienda eſſet, quamvis animum forte advertas tantum ad arcum APB, tamen æquatio qua quæſtio ſolvetur determinabit quintam partem arcuum omnium qui terminantur ad puncta A & B; nempe quintam partem arcuum ASB, APBSAPB, ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æque ac quintam partem arcus APB; quæ quintæ partes ſi dividas totam circumferentiam in æquales quinque partes PQ, QR, RS, ST, TP, erunt AT, AQ, ATS, AQR. Quoniam igitur quærendo quintas partes arcuum quos recta AB ſubtendit ad caſus omnes determinandos circumferentia tota ſecari debet in quinque punctis P, Q, R, S, T, ideo æquatio ad omnes caſus determinandos habebit radices quinque. Nam quintæ partes horum omnium arcuum pendent ab iiſdem datis, & per ejuſdem generis calculum inveniuntur; ita ut in eandem ſemper æquationem incideris ſive quæras quintam partem Arcus APB, ſive quintam partem Arcus ASB, ſive alterius cujuſvis ex arcubus quintam partem. Unde ſi æquatio qua quinta pars Arcus APB determinatur non haberet plures radices quam unam, dum quærendo quintam partem Arcus ASB incidimus in eandem illam æquationem, ſequeretur majorem hunc arcum habere eandem quin-

quintam partem cum priore qui minor est, eo quod subtensa ejus per eandem æquationis radicem exprimitur. *In omni igitur problemate necesse est æquationem qua respondetur tot habere radices, quot sunt quæsitæ quantitatis casus diversi ab iisdem datis pendentes & eadem argumentandi ratione determinandi.*

Potest vero æquatio tot habere radices quot sunt dimensiones ejus, & non plures.

Sic æquatio $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, quatuor habet radices $1, 2, 3,$ & -5; non autem plures. Nam quilibet ex his numeris scriptus in æquatione pro x efficiet terminos omnes se mutuo destruere ut dictum est; præter hos vero nullus est numerus cujus substitutione hoc eveniet.

Cæterum numerus & natura radicum ex generatione æquationis optime intelligetur.

Ut si scire vellemus quomodo generetur æquatio cujus radices sint $1, 2, 3,$ & -5, supponendum erit x ambigue significare numeros illos, seu esse $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, & $x = -5$, vel quod perinde est, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x + 5 = 0$; Et multiplicando hæc in se, prodibit multiplicatione $x - 1$, in $x - 2$, hæc æquatio $xx - 3x + 2 = 0$, quæ duarum est dimensionem ac duas habet radices 1 & 2. Et hujus multiplicatione in $x - 3$ prodibit $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, æquatio trium dimensionum totidemque radicum, quæ iterum multiplicata per $x + 5$ fit $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ut supra. Cum igitur hæc æquatio generetur ex quatuor factoribus, $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, & $x + 5$, in se continuo ductis, ubi factorum aliquis nihil est, quod sub omnibus fit nihil erit; ubi vero horum nullus nihil est, quod sub omnibus continetur nihil esse non potest. Hoc est, non potest $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30$, esse nihilo æquale ut oportet, nisi his quatuor casibus ubi est $x - 1 = 0$, vel $x - 2 = 0$, vel $x - 3 = 0$, vel denique $x + 5 = 0$, proinde soli numeri $1, 2, 3,$ & -5 valere possunt x seu radices esse æquationis. Et simile est ratiocinium de omnibus æquationibus. Nam tali multiplicatione imaginari possumus omnes generari, quamvis factores ab invicem secernere solet esse difficillimum, & ipsum est quod æquationem resolvere & radices extrahere. Habitis enim radicibus habentur factores.

Radi-

Radices vero sunt duplices affirmativæ *ut in allato exemplo* 1, 2, & 3, *&* negativæ *ut* -5. *Ex his vero aliquæ non raro evadunt* impossibiles.

Sic æquationis $xx - 2ax + bb = 0$, radices duæ quæ sunt $a + \sqrt{aa - bb}$, & $a - \sqrt{aa - bb}$ reales quidem sunt ubi aa majus est quam bb, at ubi aa minus est quam bb, evadunt impossibiles eo quod $aa - bb$ tunc evadet negativa quantitas, & negativæ quantitatis radix quadratica est impossibilis. Omnis enim radix possibilis sive affirmativa sit, sive negativa, si per seipsam multiplicetur, producet quadratum affirmativum; proinde impossibilis erit quæ quadratum negativum producere debet. Eodem argumento colligitur æquationem $x^3 - 4xx + 7x - 6 = 0$, unam quidem realem radicem habere quæ est 2, duas vero impossibiles, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$. Nam quælibet ex his 2, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$ scripta in æquatione pro x efficiet omnes ejus terminos se mutuo destruere; sunt vero $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$ numeri impossibiles, eo quod extractionem radicis quadraticæ ex numero negativo -2 præsupponant.

Æquationum vero radices sæpe impossibiles esse æquum est ne casus problematum, qui sæpe impossibiles sunt, exhibeant possibiles.

Ut si rectæ & circuli intersectio determinanda esset, & pro circuli radio & rectæ à centro ejus distantia ponantur literæ duæ; ubi æquatio intersectionem definiens habetur, si pro litera designante distantiam rectæ à centro ponatur numerus minor radio, intersectio possibilis erit; sin major, fiet impossibilis; & æquationis radices duæ quæ intersectiones duas determinant, debent esse perinde possibiles vel impossibiles ut rem ipsam vere exprimant. Atque ita si circulus
TAB. VIII. Fig. 9. CDEF, & Ellipsis ACBF se mutuo secent in punctis C, D, E, F, & ad rectam aliquam positione datam AB, demittantur perpendicula CG, DH, EI, FK, & quærendo longitudinem alicujus è perpendiculis, perveniatur tandem ad æquationem, æquatio illa ubi circulus secat Ellipsin in quatuor punctis habebit quatuor radices reales quæ erunt quatuor illa perpendicula. Quod si circuli radius manente centro ejus minuatur donec punctis E & F coalescentibus circulus tandem tangat Ellipsin, ex radicibus duæ illæ quæ perpendicula EI & FK jam coincidentia exprimunt evadent æquales. Et si

ſi circulus adhuc minuatur ut Ellipſin in puncto E F ne quidem tangat ſed ſecet tantum in alteris duobus punctis C, D, tunc ex quatuor radicibus duæ illæ quas perpendicula E I, F K, jam facta impoſſibilia, exprimebant, fient una cum perpendiculis illis impoſſibiles. Et hoc modo in omnibus æquationibus augendo vel minuendo terminos earum, ex inæqualibus radicibus duæ primo æquales deinde impoſſibiles evadere ſolent. Et inde fit quod radicum impoſſibilium numerus ſemper ſit par.

Sunt tamen radices æquationum aliquando poſſibiles ubi Schema impoſſibiles exhibet. Sed hoc fit ob limitationem aliquam in Schemate quod ad æquationem nil ſpectat.

Ut ſi in ſemicirculo A D B datis diametro A B, & linea inſcripta A D, demiſſoque perpendiculo D C, quærerem diametri ſegmentum A C, foret $\frac{ADq}{AB} = AC$. Et per hanc æquationem A C realis exhibetur quantitas ubi linea inſcripta A D major eſt quam diameter A B; per Schema vero A C tunc evadit impoſſibilis. Nimirum in ſchemate linea A D ſupponitur inſcribi in circulo, atque adeo diametro circuli major eſſe non poteſt; in æquatione vero nihil eſt quod à conditione illa pendeat. Ex hac ſola linearum conditione colligitur æquatio, quod ſint A B, A D, & A C continue proportionales. Et quoniam æquatio non complectitur omnes conditiones ſchematis non neceſſe eſt ut omnium conditionum teneatur limitibus. Quicquid amplius eſt in ſchemate quam in æquatione poteſt illud limitibus arctare, hanc non item. Qua de cauſa ubi æquationes ſunt imparium dimenſionum, adeoque radices omnes impoſſibiles habere non poſſunt; ſchemata quantitatibus à quibus radices omnes pendent ſæpe limites imponunt quos transgredi ſervatis ſchematum conditionibus impoſſibile eſt. TAB. VIII. Fig. 10.

Ex radicibus vero quæ reales ſunt, affirmativæ & negativæ ad plagas oppoſitas ſolent tendere.

Sic in Fig. nona quærendo perpendiculum C G incidetur in æquationem cujus duæ erunt affirmativæ radices C G ac D H à punctis C & D tendentes verſus unam plagam, & duæ negativæ E I & F K, tendentes à punctis E & F verſus plagam oppoſitam. TAB. VIII. Fig. 9.

Aut si in linea AB ad quam perpendicula demittuntur detur aliquod punctum P, & pars ejus PG, à puncto illo dato ad perpendiculorum aliquod CG, extendens sequæratur, incidemus in æquationem quatuor radicum PG, PH, PI, PK, quarum quæsita PG, & quæ à puncto P ad easdem partes cum PG tendunt (ut PK) affirmativæ erunt, quæ vero tendunt ad partes contrarias (ut PH, PI) negativæ.

Ubi æquationis radices nullæ impossibiles sunt, numerus radicum *affirmativarum & negativarum ex* signis *terminorum æquationis cognosci potest. Tot enim sunt radices affirmativæ quot signorum in continua serie* mutationes *de* + *in* − & − *in* +; *cæteræ* negativæ *sunt.*

Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ubi terminorum signa se sequuntur hoc ordine + − − + − variationes secundi − à primo +, quarti + à tertio − & quinti −, à quarto +, indicant tres affirmativas esse radices, adeoque quartam negativam esse. At ubi radices aliquæ *impossibiles* sunt regula non valet, nisi quatenus impossibiles illæ quæ nec negativæ sunt nec affirmativæ pro *ambiguis* habeantur. Sic in æquatione $x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$, signa indicant unam esse affirmativam radicem & duas negativas. Finge $x = 2p$ seu $x - 2p = 0$, & multiplica æquationem priorem per hanc $x - 2p = 0$, ut una adhuc radix affirmativa addatur prioribus, & prodibit hæc æquatio $x^4 - px^3 + ppxx \frac{-6p^3}{-q} x + 2pq = 0$, quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices, habet tamen, si mutationem signorum spectes, affirmativas quatuor. Sunt ergo *duæ impossibiles* quæ pro ambiguitate sua priori casu negativæ posteriori affirmativæ esse videntur.

Verum quot radices impossibiles sunt cognosci fere potest per hanc regulam.

Constitue seriem fractionum quorum denominatores sunt numeri in hac progressione 1, 2, 3, 4, 5, &c. *pergendo ad numerum usque qui est dimensionum æquationis; numeratores vero eadem series numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem posteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca super terminis mediis æquationis. Et sub quolibet mediorum terminorum, si quadratum ejus ductum* in

in fractionem capiti imminentem sit majus quam rectangulum terminorum utrinque consistentium, colloca signum +; *sin minus, signum* —. *Sub primo vero & ultimo termino colloca signum* +. *Et tot erunt radices impossibiles quot sunt in subscriptorum signorum serie mutationes de* + *in* — *&* — *in* +.

Ut si habeatur æquatio $x^3+pxx+3ppx-q=0$: Divido seriei hujus $\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3}.$ fractionum secundam $\frac{2}{2}$ per primam $\frac{3}{1}$, & tertiam $\frac{1}{3}$ per secundam $\frac{2}{2}$, & fractiones prodeuntes $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{3}$ colloco super mediis terminis æquationis ut sequitur. Dein quoniam quadratum secundi termini pxx ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, nimirum $\frac{ppx^4}{3}$ minus est quam primi termini x^3, & tertii $3ppx$ rectangulum $3ppx^4$ sub termino pxx colloco signum —. At quia tertii termini $3ppx$ quadratum $9p^4xx$ ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, majus est quam nihil, atque adeo multo majus quam secundi termini pxx, & quarti $-q$ rectangulum negativum, colloco sub tertio illo termino signum +. Dein sub primo termino x^3 & ultimo $-q$ colloco signa +. Et signorum subscriptorum quæ in hac sunt serie + — + + mutationes duæ, una de + in —, alia de — in + indicant duas esse radices impossibiles.

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{3}. & \frac{1}{3}. & \\ x^3 & +pxx & +3ppx & -q=0 \\ + & - & + & + \end{array}$$

Sic & æquatio $x^3-4xx+4x-6=0$, duas habet radices impossibiles. Æquatio item $x^4-6xx-3x-2=0$, duas habet. Nam hæc fractionum series $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}.$ dividendo secundam per primam, tertiam per secundam, & quartam per tertiam, dat hanc seriem $\frac{3}{8}.\frac{4}{9}.\frac{3}{8}$ super mediis æquationis terminis collocandam.

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{3}. & \frac{1}{3}. & \\ x^3 & -4xx & +4x & -6=0 \\ + & + & - & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{3}{8} & \frac{4}{9} & \frac{3}{8} & \\ x^4 & * & -6xx & -3x & -2=0 \\ + & + & + & - & + \end{array}$$

Dein secundi termini qui hic nihil est quadratum ductum in fractionem imminentem $\frac{3}{8}$ producit nihil, quod tamen majus est quam rectangulum negativum $-6x^6$ sub terminis utrinque positis x^4 & $-6xx$ contentum. Quare sub termino illo deficiente scribo +. In cæteris pergo ut in exemplo superiori; & signorum subscriptorum prodit hæc series + + + — + ubi duæ mutationes indicant duas

 radi-

radices impoſſibiles. Et ad eundem modum in æquatione $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, deteguntur impoſſibiles duæ.

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & -4x^4 & +4x^3 & -2xx & -5x & -4=0 \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

Ubi termini duo vel plures ſimul deſunt, ſub primo terminorum deficientium collocandum eſt ſignum $-$, ſub ſecundo ſignum $+$, ſub tertio ſignum $-$, & ſic deinceps, ſemper variando ſigna, niſi quod ſub ultimo terminorum ſimul deficientium ſemper collocandum eſt ſignum $+$ ubi termini deficientibus utrinque proximi habent ſigna contraria. Ut in æquationibus

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & +ax^4 & * & * & * & +a^5=0, \\ + & + & - & + & - & + \end{array}$$

&

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & +ax^4 & * & * & * & -a^5=0, \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

quarum prior quatuor poſterior duas habet impoſſibiles radices. Sic & æquatio

$$\begin{array}{cccccccc} x^7 & -2x^6 & +3x^5 & -2x^4 & +x^3 & * & * & -3=0 \\ + & - & + & - & + & - & + & + \end{array}$$

ſex habet impoſſibiles.

Hinc etiam cognoſci poteſt utrum radices impoſſibiles inter affirmativas radices latent an inter negativas. Nam ſigna terminorum ſignis ſubſcriptis variantibus imminentium indicant tot affirmativas eſſe impoſſibiles quot ſunt ipſorum variationes, & tot negativas quot ſunt ipſorum ſucceſſiones ſine variatione. Sic in æquatione

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & -4x^4 & +4x^3 & -2xx & -5x & -4=0 \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

quoniam ſignis infra ſcriptis variantibus $+ - +$ quibus radices duæ impoſſibiles indicantur, imminentes termini $-4x^4 + 4x^3 - 2xx$, ſigna habent $- + -$, quæ per duas variationes indicant duas affirmativas radices; ideo radices duæ impoſſibiles inter affirmativas latebunt. Cum itaque omnium æquationis terminorum ſigna $+ - + - - -$ per tres variationes indicent tres eſſe affirmativas radices, & reliquas duas negativas eſſe, & inter affirmativas lateant duæ impoſſibiles, ſequitur æquationis unam eſſe radicem vere affirmativam duas negativas ac duas impoſſibiles. Quod ſi æquatio fuiſſet

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & -4x^4 & -4x^3 & -2xx & -5x & -4=0 \\ + & + & - & - & + & + \end{array}$$

tunc termini ſubſcriptis ſignis prioribus variantibus $+ -$ imminentes, ni-

nimirum $-4x^4-4x^3$ per signa sua non variantia $-$&$-$ indicant unam ex negativis radicibus impossibilem esse; & termini signis subscriptis posterioribus variantibus $-+$ imminentes, nimirum $-2xx$ $-5x$ per signa sua non variantia $-$ & $-$ indicant aliam ex negativis radicibus impossibilem esse. Quamobrem cum æquationis signa $+-----$ per unam variationem indicent unam affirmativam radicem, cæteras quatuor negativas esse; sequitur unam esse affirmativam, duas negativas, ac duas impossibiles. Atque hæc ita se habent ubi non sunt plures impossibiles radices quam per regulam allatam deteguntur. Possunt enim plures esse, licet id perraro eveniat.

De transmutationibus Æquationum.

Cæterum æquationis cujusvis radices omnes affirmativæ *in* negativas *&* negativæ *in* affirmativas *mutari possunt*, *idque mutando tantum signa terminorum alternorum.*

Sic æquationis $x^5-4x^4+4x^3-2xx-5x-4=0$, radices tres affirmativæ mutabuntur in negativas, & duæ negativæ in affirmativas mutando tantum signa secundi quarti & sexti termini ut hic fit, $x^5+4x^4+4x^3+2xx-5x+4=0$. Easdem habet hæc æquatio radices cum priore nisi quod hic affirmativæ sunt quæ ibi erant negativæ, & hic negativæ quæ ibi erant affirmativæ; & radices duæ impossibiles quæ ibi inter affirmativas latebant hic latent inter negativas, ita ut his deductis restet unica tantum radix vere negativa.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes quæ diversis usibus inserviunt. *Possumus enim supponere radicem æquationis ex cognita & incognita aliqua quantitate utcunque componi*, *& perinde pro ea substituere quod æquipollens esse fingitur*. Ut si supponamus radicem æqualem esse summæ vel differentiæ cognitæ alicujus & incognitæ quantitatis. Nam possumus hoc pacto radices æquationis cognita illa quantitate augere vel diminuere, vel de cognita quantitate subducere; atque ita efficere ut earum aliquæ quæ prius erant negativæ jam fiant affirmativæ, vel ut aliquæ ex affirmativis evadant negativæ; vel etiam ut omnes evadant affirmativæ aut omnes negativæ. Sic in æquatione $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, si radices unitate

augeri vellem, fingo $x+1=y$, seu $x=y-1$, & perinde pro x scribo in æquatione $y-1$, & pro quadrato, cubo, quadrato-quadrato de x similem potestatem de $y-1$, ad hunc modum.

$x^4.$	$y^4-4y^3+6yy-4y+1$
$-x^3.$	$-y^3+3yy-3y+1$
$-19xx.$	$-19yy+38y-19$
$+49x.$	$+49y-49$
$-30.$	-30
Summa	$y^4-5y^3-10yy+80y-96=0.$

Et æquationis prodeuntis $y^4-5y^3-10yy+80y-96=0$, radices erunt $2, 3, 4, -4$, quæ prius erant $1, 2, 3, -5$, unitate jam factæ majores. Quod si pro x scripsissem $y+1\frac{1}{2}$ prodiisset æquatio $y^4+5y^3-10yy-\frac{5}{4}y+\frac{39}{16}=0$, cujus duæ fuissent radices affirmativæ $\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$ ac duæ negativæ $-\frac{1}{2}$ & $-6\frac{1}{2}$. Pro x vero scribendo $y-6$ prodiisset æquatio cujus radices fuissent $7, 8, 9, 1$, omnes nimirum affirmativæ, & pro eodem scribendo $y+4$ radices jam numero quaternario diminutæ evasissent $-3, -2, -1, -9$, negativæ omnes.

Et hoc modo augendo vel diminuendo radices siquæ impossibiles sunt, hæ aliquando facilius detegentur quam prius. Sic in æquatione $x^3-3aax-3a^3=0$, radices nullæ per præcedentem regulam apparent impossibiles. At si augeas radices quantitate a scribendo $y-a$ pro x, in æquatione resultante $y^3-3ayy-a^3=0$, radices duæ impossibiles jam per regulam illam detegi possunt.

Eadem operatione possumus etiam secundos terminos æquationum tollere. Hoc enim fiet si cognitam quantitatem secundi termini æquationis propositæ per numerum dimensionum æquationis divisam, subducamus de quantitate quæ pro nova æquationis radice significanda assumitur, & residuum substituamus pro radice æquationis propositæ. Ut si proponatur æquatio $x^3-4xx+4x-6=0$, cognitam quantitatem secundi termini quæ est -4 divisam per numerum dimensionum æquationis 3 subduco de specie quæ pro nova radice significanda assumitur, puta de y, & residuum $y+\frac{4}{3}$ substituo pro x, & provenit,

y^3

$$\begin{array}{rrrr} y^3 + 4yy & + \frac{16}{3}y & + \frac{64}{27} \\ -4yy & - \frac{32}{3}y & - \frac{64}{9} \\ & +4y & + \frac{16}{3} \\ & & -6 \\ \hline y^3 \quad * & - \frac{4}{3}y & - \frac{146}{27} = 0. \end{array}$$

Eadem methodo potest & tertius æquationis terminus tolli. Proponatur æquatio $x^4 - 3x^3 + 3xx - 5x - 2 = 0$, & finge $x = y - e$, & substituendo $y - e$ pro x orietur hæc æquatio.

$$y^4 \begin{matrix} -4e \\ -3 \end{matrix} y^3 \begin{matrix} +6ee \\ +9e \\ +3 \end{matrix} yy \begin{matrix} -4e^3 \\ -9ee \\ -6e \\ -5 \end{matrix} y \left. \begin{matrix} +e^4 \\ +3e^3 \\ +3ee \\ +5e \\ -2 \end{matrix} \right\} = 0.$$

Hujus æquationis tertius terminus est $6ee + 9e + 3$ ductum in yy. Ubi si $6ee + 9e + 3$ nullum esset, eveniret ipsum quod volumus. Fingamus itaque nullum esse ut inde colligamus quinam numerus ad hunc effectum substitui debet pro e, & habebimus æquationem quadraticam $6ee + 9e + 3 = 0$, quæ divisa per 6 fiet $ee + \frac{3}{2}e + \frac{1}{2} = 0$, seu $ee = -\frac{3}{2}e - \frac{1}{2}$, & extracta radice $e = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}$, seu $= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$, hoc est $= -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$, atque adeo vel $= -\frac{1}{2}$ vel $= -1$. Unde $y - e$ erit vel $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$. Quamobrem cum $y - e$, scriptum fuit pro x, vice $y - e$ debet $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$ scribi pro x, ut tertius æquationis resultantis terminus nullus sit. Et in utroque quidem casu id eveniet. Nam si pro x scribatur $y + \frac{1}{2}$ orietur hæc æquatio $y^4 - y^3 - \frac{15}{4}y - \frac{65}{16} = 0$; sin scribatur $y + 1$, orietur hæc $y^4 + y^3 - 4y - 6 = 0$.

Possunt & radices æquationis per datos numeros multiplicari vel dividi; & hoc pacto termini æquationum diminui, fractionesque & radicales quantitates aliquando tolli.

Ut si æquatio sit $y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0$, ad tollendas fractiones fingo esse $y = \frac{1}{3}z$, & perinde pro y substituendo $\frac{1}{3}z$ provenit æquatio nova $\frac{z^3}{27} - \frac{12z}{27} - \frac{146}{27} = 0$, & rejecto terminorum communi

muni denominatore, $z^3 - 12z - 146 = 0$, cujus æquationis radices sunt triplo majores quam ante. Et rursus ad diminuendos terminos æquationis hujus si scribatur $2v$ pro z, prodibit $8v^3 - 24v - 146 = 0$, & divisis omnibus per 8 fiet $v^3 - 3v - 18\frac{1}{4} = 0$, cujus æquationis radices dimidiæ sunt radicum prioris. Et hic si tandem inveniatur v ponendum erit $2v = z$, $\frac{1}{3}z = y$, & $y + \frac{4}{3} = x$, & æquationis primo propositæ $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$ habebitur radix x.

Sic & in æquatione $x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0$, ad tollendam quantitatem radicalem $\sqrt{3}$, pro x scribo $y\sqrt{3}$, & provenit æquatio $3y^3\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$, quæ divisis omnibus terminis per $\sqrt{3}$ fit $3y^3 - 2y + 1 = 0$.

Rursus æquationis radices in earum reciprocas transmutari possunt, & hoc pacto æquatio aliquando ad formam commodiorem reduci.

Sic æquatio novissima $3y^3 - 2y + 1 = 0$, scribendo $\frac{1}{z}$ pro y evadit $\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0$, seu terminis omnibus multiplicatis per z^3, & ordine terminorum mutato $z^3 - 2zz + 3 = 0$. Potest etiam æquationis terminus penultimus hoc pacto tolli, si modo secundus prius tollatur, ut factum vides in exemplo præcedente. Aut si antepenultimum tolli cupias id fiet si modo tertium prius tollas. Sed & radix minima hoc pacto in maximam convertitur, & maxima in minimam; quod usum nonnullum habere potest in sequentibus. Sic in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, cujus radices sunt $3, 2, 1, -5$, si scribatur $\frac{1}{y}$ pro x resultabit æquatio $\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{yy} + \frac{49}{y} - 30 = 0$, quæ, terminis omnibus multiplicatis per y^4 ac divisis per 30, signisque mutatis, fiet $y^4 - \frac{49}{30}y^3 + \frac{19}{30}yy + \frac{1}{30}y - \frac{1}{30} = 0$, cujus radices sunt $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{5}$; radicum affirmativarum maxima 3 jam conversa in minimam $\frac{1}{3}$, & minima 1 jam facta maxima, & radice negativa -5 quæ omnium maxime distabat à nihilo, jam omnium maxime accedente ad nihil.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes sed quæ omnes ad exemplum transmutationis illius ubi tertium æquationis terminum sustulimus

mus confici possunt, ut non opus sit hac de re plura dicere. Addamus potius aliqua de Limitibus Æquationum.

Ex Æquationum generatione constat quod cognita quantitas secundi *termini æquationis, si signum ejus mutetur, æqualis sit aggregato omnium radicum sub signis propriis*; *ea* tertii *æqualis aggregato rectangulorum sub singulis binis radicibus*; *ea* quarti *si signum ejus mutetur, æqualis aggregato contentorum sub singulis ternis radicibus*; *ea* quinti *æqualis aggregato contentorum sub singulis quaternis*; *& sic in infinitum.*

Assumamus $x=a$, $x=b$, $x=-c$, $x=d$, &c. seu $x-a=0$, $x-b=0$, $x+c=0$, $x-d=0$, & ex horum continua multiplicatione generemus æquationes, ut supra. Jam multiplicando $x-a$ per $x-b$ producetur æquatio $xx\begin{matrix}-a\\-b\end{matrix}x+ab=0$; ubi cognita quantitas secundi termini, si signa ejus mutentur, nimirum $a+b$, est summa duarum radicum a & b, & cognita tertii ab illud unicum quod sub utraque continetur rectangulum. Rursus multiplicando hanc æquationem per $x+c$ producetur æquatio cubica $x^3\begin{matrix}-a\\-b\\+c\end{matrix}xx\begin{matrix}+ab\\-ac\\-bc\end{matrix}x+abc=0$, ubi cognita quantitas secundi sub signis mutatis nimirum $a+b-c$ est summa radicum a, b & $-c$; cognita tertii $ab-ac-bc$, summa rectangulorum sub singulis binis a & b, a & $-c$, b & $-c$; & cognita quarti sub signo mutato $-abc$ illud unicum contentum est quod omnium continua multiplicatione generatur, a in b in $-c$. Adhæc multiplicando cubicam illam æquationem per $x-d$ producetur hæcce quadrato-quadratica

$$x^4\begin{matrix}-a\\-b\\+c\\-d\end{matrix}x^3\begin{matrix}+ab\\-ac\\-bc\\+ad\\+bd\\-cd\end{matrix}xx\begin{matrix}+abc\\-abd\\+bcd\\+acd\end{matrix}x-abcd=0:$$

ubi cognita quantitas secundi termini sub signis mutatis $a+b-c+d$, est summa omnium radicum; ea tertii $ab-ac-bc+ad+bd-cd$ summa rectangulorum sub singulis binis; ea quarti sub signis mutatis $-abc+abd-bcd-acd$ summa contentorum sub singulis ternis;

nis; ea quinti $-abcd$ contentum unicum sub omnibus. Et hinc primo colligimus omnes æquationis cujuscunque, terminos nec fractos nec surdos habentis, radices non surdas, & radicum binarum rectangula, ternarumque aut plurium contenta esse aliquos ex divisoribus integris ultimi termini; atque adeo ubi constiterit nullum ultimi termini divisorem, esse aut radicem æquationis, aut duarum radicum rectangulum pluriumve contentum, simul constabit nullam esse radicem radicumve rectangulum aut contentum nisi quod sit surdum.

Ponamus jam cognitas quantitates terminorum æquationis sub signis mutatis esse p, q, r, s, t, v, &c. eam nempe secundi p, tertii q, quarti r, quinti s, & sic deinceps. Et signis terminorum probe observatis fiat $p=a.\ pa+2q=b.\ pb+qa+3r=c.\ pc+qb+ra+4s=d.\ pd+qc+rb+sa+5t=e.\ pe+qd+rc+sb+ta+6v=f.$ & sic in infinitum, observata serie progressionis. Et erit a summa radicum, b summa quadratorum ex singulis radicibus, c summa cuborum, d summa quadrato-quadratorum, e summa quadrato-cuborum, f summa cubo-cuborum, & sic in reliquis. Ut in æquatione $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, ubi cognita quantitas secundi termini est -1, tertii -19, quarti $+49$, quinti -30; ponendum erit $1=p$, $19=q$, $-49=r$, $30=s$. Et inde orientur $a=(p=)1.\ b=(pa+2q=1+38=)39.\ c=(pb+qa+3r=39+19-147=)-89.\ d=(pc+qb+ra+4s=-89+741-49+120=)723.$ Quare summa radicum erit 1, summa quadratorum radicum 39, summa cuborum -89, & summa quadrato-quadratorum 723. Nimirum æquationis illius radices sunt 1, 2, 3 & -5, & harum summa $1+2+3-5$ est 1, summa quadratorum $1+4+9+25$ est 39, summa cuborum $1+8+27-125$ est -89, & summa quadrato-quadratorum $1+16+81+625$ est 723.

De Limitibus Æquationum.

Et hinc colliguntur *Limites* inter quos consistent radices æquationis ubi nulla earum impossibilis est. Nam cum radicum omnium quadrata sunt affirmativa, quadratorum summa affirmativa erit, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento, summa quadrato-quadratorum radicum omnium major erit quam quadrato-quadratum radicis maximæ, & summa cubo-cuborum major quam cubo-cubus radicis maximæ.

Quam-

Quamobrem si limitem desideres quem radices nullæ transgrediuntur, quære summam quadratorum radicum & extrahe ejus radicem quadraticam. Hæc enim radix major *erit quam radix maxima æquationis.* Sed ad radicem maximam propius accedes si quæras *summam quadrato-quadratorum & extrahas ejus radicem quadrato-quadraticam, & adhuc* magis *si quæras summam cubo-cuborum & extrahas ejus radicem cubo-cubicam: Et ita in infinitum.*

Sic in æquatione præcedente radix quadratica summæ quadratorum radicum, seu $\sqrt{39}$, est $6\frac{1}{4}$ quam proxime, & $6\frac{1}{4}$ magis distat à nihilo quam ulla radicum 1, 2, 3, -5. At radix quadrato-quadratica summæ quadrato-quadratorum radicum, nempe $\sqrt[4]{723}$ quæ est $5\frac{1}{5}$ circiter, proprius accedit ad radicem à nihilo remotissimam -5.

Si inter summam quadratorum & summam quadrato-quadratorum radicum inveniatur media proportionalis, erit ea paulo major quam summa cuborum radicum sub signis affirmativis connexorum. Et inde hujus mediæ proportionalis & summæ cuborum sub propriis signis, ut prius inventæ, semisumma erit major quam summa cuborum radicum affirmativarum, & semidifferentia major quam summa cuborum radicum negativarum.

Atque adeo maxima radicum affirmativarum minor erit quam radix cubica illius semisummæ, & maxima radicum negativarum minor quam radix cubica illius semidifferentiæ.

Sic in æquatione præcedente media proportionalis inter summam quadratorum radicum 39, & summam quadrato-quadratorum 723 est 168 circiter. Summa cuborum sub propriis signis supra erat -89. Hujus & 168 semisumma est $39\frac{1}{2}$, semidifferentia $128\frac{1}{2}$. Prioris radix cubica, quæ est $3\frac{2}{5}$ circiter, major est quam maxima radicum affirmativarum 3. Posterioris radix cubica quæ est $5\frac{1}{22}$ proxime, transcendit radicem negativam -5. Quo exemplo videre est quam prope ad radicem hac methodo acceditur ubi unica tantum radix negativa est vel unica affirmativa. *Et tamen propius adhuc accederetur*, si inter summam quadrato quadratorum radicum & summam cubo-cuborum media proportionalis inveniretur atque ex hujus, & summæ quadrato-cuborum radicum semisumma & semidifferentia

radices quadrato cubicæ extraherentur. Nam radix quadrato-cubica semisummæ transcenderet maximam radicem affirmativam, & radix quadrato-cubica semidifferentiæ maximam seu extimam negativam, sed excessu multo minore quam ante. Cum igitur radix quælibet, augendo vel diminuendo radices omnes fieri potest minima, dein minima in maximam converti, & postea omnes præter maximam fieri negativæ, constat quomodo radix imperata quam proxime potest obtineri.

Si radices omnes præter duas negativæ sunt, possunt illæ duæ simul hoc modo erui.

Inventa juxta methodum præcedentem summa cuborum duarum illarum radicum, ut & summa quadrato-cuborum & summa quadrato-quadrato cuborum radicum omnium; inter posteriores duas summas quære mediam proportionalem, & ea erit differentia inter summam cubo-cuborum radicum affirmativarum, & summam cubo-cuborum radicum negativarum quam proxime; adeoque hujus mediæ proportionalis & summæ cubo-cuborum radicum omnium semisumma erit summa cubo-cuborum radicum affirmativarum, & semidifferentia erit summa cubo-cuborum radicum negativarum. Habita igitur tum summa cuborum, tum summa cubo-cuborum radicum duarum affirmativarum, de duplo summæ posterioris aufer quadratum summæ prioris, & reliqui radix quadratica erit differentia cuborum duarum radicum. Habita vero tum summa tum differentia cuborum habentur cubi ipsi. Extrahe eorum radices cubicas & habebuntur æquationis radices duæ affirmativæ quam proxime. Et si in altioribus potestatibus opus consimile institueretur magis adhuc accederetur ad radices. Sed hæ limitationes ob difficilem calculum minus usui sunt, & ad æquationes tantum se extendunt quæ nullas habent radices imaginarias. Quapropter limites alia ratione invenire jam docebo quæ & facilior sit & ad omnes æquationes se extendat.

Multiplicetur æquationis terminus unusquisque per numerum dimensionum ejus, & dividatur factum per radicem æquationis. Dein rursus multiplicetur unusquisque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quam prius, & factum dividatur per radicem æquationis. Et sic pergatur semper multiplicando per numeros unitate minores quam prius, & factum dividendo per radicem, donec tandem termini

mini omnes destruantur quorum signa diversa sunt à signo primi seu altissimi termini præter ultimum. Et numerus ille erit omni affirmativa radice major, qui in terminis prodeuntibus scriptus pro radice, efficit eorum qui singulis vicibus per multiplicationem producebantur aggregatum ejusdem semper esse signi cum primo seu altissimo termino æquationis.

Ut si proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 0$. Hanc primum sic multiplico $\overset{5}{x^5} - \overset{4}{2x^4} - \overset{3}{10x^3} + \overset{2}{30xx} + \overset{1}{63x} - \overset{0}{120}$. Dein terminos prodeuntes divisos per x rursum multiplico sic $\overset{4}{5x^4} - \overset{3}{8x^3} - \overset{2}{30xx} + \overset{1}{60x} + \overset{0}{63}$, & terminos prodeuntes rursum dividendo per x prodeunt $20x^3 - 24xx - 60x + 60$, quos minuendi gratia divido per maximum divisorem 4 & fiunt $5x^3 - 6xx - 15x + 15$. Hi itidem multiplicati per progressionem 3. 2. 1. 0, & divisi per x fiunt $15xx - 12x - 15$, & rursum divisi per 3 fiunt $5xx - 4x - 5$. Et hi multiplicati per progressionem 2. 1. 0, & divisi per $2x$ fiunt $5x - 2$. Jam cum terminus æquationis altissimus x^5 affirmativus sit, tento quinam numerus scriptus in his productis pro x, efficiet ea omnia affirmativa esse. Et quidem tentando 1, fit $5x - 2 = 3$ affirmativum, sed $5xx - 4x - 5$, fit -4 negativum. Quare limes erit major quam 1. Tento itaque numerum aliquem majorem puta 2. Et in singulis substituendo 2 pro x, evadunt

$$5x - 2 = 8$$
$$5xx - 4x - 5 = 7$$
$$5x^3 - 6xx - 15x + 15 = 1$$
$$5x^4 - 8x^3 - 30xx + 60x + 63 = 79$$
$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 46.$$

Quare cum numeri prodeuntes 8. 7. 1. 79. 46, sint omnes affirmativi, erit numerus 2 major quam radicum affirmativarum maxima. Similiter si limitem negativarum radicum invenire vellem, tento numeros negativos. Vel quod perinde est muto signa terminorum alternorum & tento affirmativos. Mutatis autem terminorum alternorum signis, quantitates in quibus numeri substituendi sunt fient

$$5x+2$$
$$5xx+4x-5$$
$$5x^3+6xx-15x-15$$
$$5x^4+8x^3-30xx-60x+63$$
$$x^5+2x^4-10x^3-30xx+63x+120.$$

Ex his ſeligo quantitatem aliquam ubi termini negativi maxime prævalere videntur; puta $5x^4+8x^3-30xx-60x+63$, & hic ſubſtituendo pro x numeros 1 & 2 prodeunt numeri negativi -14 & -33. Unde limes erit major quam -2. Subſtituendo autem numerum 3 prodit numerus affirmativus 234. Et ſimiliter in cæteris quantitatibus ſubſtituendo numerum 3 pro x prodit ſemper numerus affirmativus. Id quod ex inſpectione ſola colligere licet. Quare numerus -3 tranſcendit omnes radices negativas. Atque ita habentur limites 2 & -3 inter quos radices omnes conſiſtunt.

Horum vero limitum inventio uſui eſt tum in reductione æquationum per radices rationales, tum in extractione radicum ſurdarum ex ipſis; ne forte radicem extra hos limites aliquando quæramus. Sic in æquatione noviſſima ſi radices rationales, ſiquas forte habeat, invenire vellem; ex ſuperioribus certum eſt has non alias eſſe poſſe quam diviſores ultimi termini æquationis, qui hic eſt 120. Proin tentando omnes ejus diviſores, ſi nullus earum ſcriptus in æquatione pro radice x efficeret omnes terminos evaneſcere; certum eſt æquationem non admittere radicem niſi quæ ſit ſurda. At ultimi termini 120, diviſores permulti ſunt, nimirum $1.-1.2.-2.3.-3.4.-4.5.-5.6.-6.8.-8.10.-10.12.-12.15.-15.20.-20.24.-24.30.-30.40.-40.60.-60.120.$ & -120. Et hos omnes diviſores tentare, tædio eſſet. Cognito autem quod radices inter limites 2 & -3 conſiſtunt, liberamur à tanto labore. Jam enim non opus erit diviſores tentare niſi qui ſunt inter hos limites, nimirum diviſores $1, -1$ & -2. Nam ſi horum nullus radix eſt, certum eſt æquationem non habere radicem niſi quæ ſit ſurda.

Æqua-

Æquationum Reductio per Divisores surdos.

Hactenus reductionem æquationum tradidi quæ rationales divisores admittunt. Sed antequam æquationem quatuor, sex, aut plurium dimensionum irreducibilem esse concludere possumus, tentandum erit etiam annon per surdum aliquem divisorem reduci queat; vel quod perinde est, tentandum erit annon æquatio ita in duas æquales partes dividi possit ut ex utraque radix extrahatur. Id autem fiet per sequentem methodum.

Dispone æquationem secundum dimensiones literæ alicujus, ita ut omnes ejus termini sub signis suis conjunctim æquales sint nihilo, & terminus altissimus affirmativo signo afficiatur. Deinde si æquatio quadratica *sit.* (*nam & hunc casum ob rei analogiam adjicere lubet*) *aufer utrobique terminum infimum, & adde quartam partem quadrati cognitæ quantitatis termini medii.*

Ut si æquatio sit $xx - ax - b = 0$, aufer utrobique $-b$ & adde $\frac{1}{4}aa$, & emerget $xx - ax + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$, *& extracta utrobique radice fiet* $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, sive $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$.

Quod si æquatio sit quatuor dimensionum, *sit ea* $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, ubi p, q, r, & s, *denotant cognitas quantitates terminorum æquationis signis propriis adfectas. Fac*

$$q - \tfrac{1}{4}pp = \alpha. \quad r - \tfrac{1}{2}\alpha p = \beta.$$
$$s - \tfrac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta.$$

Dein pone pro n communem aliquem terminorum β & 2ζ divisorem integrum, & non quadratum, qui & impar esse debet & per 4 divisus unitatem relinquere, si terminorum p & r alteruter sit impar. Pone etiam pro k divisorem aliquem quantitatis $\frac{\beta}{n}$ *si p sit par; vel imparis divisoris dimidium si p sit impar; vel nihil, si dividuum β sit nihil. Aufer Quotum de* $\frac{1}{2}pk$, *& reliqui dimidium dic l. Dein pro Q pone* $\frac{\alpha + nkk}{2}$, *& tenta si n dividat* $QQ - s$, *& Quoti radix sit rationalis & æqualis l. Si hoc contigerit ad utramque partem æquationis adde* $nkkxx + 2nklx + nll$, *& radicem extrahes utrobique, prodeunte* $xx + \frac{1}{2}px + Q = n^{\frac{1}{2}}$ *in* $kx + l$.

Exem-

Exempli gratia, proponatur æquatio $x^4+12x-17=0$, & quia p & q hic desunt, & r est 12, & s est -17, substitutis hisce numeris fiet $\alpha=0$, $\beta=12$, & $\zeta=-17$, & ipsorum β & 2ζ seu 12 & -34 communis divisor unicus, nimirum 2, erit n. Porro $\frac{\beta}{n}$ est 6, & ejus divisores 1, 2, 3, & 6 successive tentandi sunt pro k, & -3, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$ pro l respective. Est autem $\frac{\alpha+nkk}{2}$ id est kk æquale Q. Est & $\sqrt{\frac{QQ-s}{n}}$, id est $\sqrt{\frac{QQ+17}{2}}=l$. Ubi numeri pares 2 & 6 scribuntur pro k, Q fit 4 & 36, & $QQ-s$ numerus erit impar adeoque dividi non potest per n seu 2. Quare numeri illi 2 & 6 rejiciendi sunt. Ubi vero 1 & 3 scribuntur pro k, Q fit 1 & 9, & $QQ-s$ fit 18 & 98, qui numeri dividi possunt per n, & quotorum radices extrahi. Sunt enim ± 3 & ± 7: quarum tamen sola -3 congruit cum l. Pono itaque $k=1$, $l=-3$, & $Q=1$, & quantitatem $nkkxx+2nklx+nll$, id est $2xx-12x+18$, addo ad utramque partem æquationis, & prodit $x^4+2xx+1=2xx-12x+18$, & extracta utrobique radice, $xx+1=x\sqrt{2}-3\sqrt{2}$. Quod si radicis extractionem effugere malueris pone $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, & invenietur ut ante $xx+1=\pm\sqrt{2}\times\overline{x-3}$. Et ex hac æquatione si radices iterum extrahas proveniet $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\pm\sqrt{-\frac{1}{2}+3\sqrt{2}}$, *h.e.* secundum signorum variationes, $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$, & $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$. Item $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$, & $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$. Quæ quidem quatuor sunt radices æquationis sub initio propositæ $x^4+12x-17=0$. Sed earum ultimæ duæ sunt impossibiles.

Proponamus jam æquationem $x^4-6x^3-58xx-114x-11=0$, & scribendo -6, -58, -114, & -11 pro p, q, r, & s respective, orietur $-67=\alpha$, $-315=\beta$, & $-1133\frac{1}{4}=\zeta$. Numerorum β & 2ζ, seu -315 & $-\frac{4533}{2}$, communis divisor est unicus 3, adeoque hic erit n, & ipsius $\frac{\beta}{n}$ seu -105 divisores sunt

3,

3, 5, 7, 15, 21, 35, & 105, qui itaque tentandi sunt pro k. Quare tento primum 3, & quotum -35, qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k seu -105 per 3, subduco de $\frac{1}{2}pk$, seu -3×3, & restat 26; cujus dimidium 13 esse debet l. Sed $\frac{\alpha+nkk}{2}$, seu $\frac{-67+27}{2}$ id est -20 erit Q, & $QQ-s$ erit 411, qui dividi potest per n seu 3, sed quoti 137 radix non potest extrahi. Quamobrem rejicio 3 & tento 5 pro k. Quotus qui jam prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, seu -105 per 5, est -21, & hunc subducendo de $\frac{1}{2}pk$ seu -3×5 restat 6, cujus dimidium 3 erit l. Est & Q seu $\frac{\alpha+nkk}{2}$ id est $\frac{-67+75}{2}$ numerus 4. Et $QQ-s$, seu $16+11$ dividi potest per n; & Quoti, qui est 9, radix extracta 3 congruit cum l. Quamobrem concludo esse $l=3$, $k=5$, $Q=4$, & $n=3$, & si $nkkxx+2nklx+nll$, id est $75xx+90x+27$ ad utramque partem æquationis addatur, radicem utrobique extrahi posse, & prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, seu $xx-3x+4=\pm\sqrt{3}\times\overline{5x+3}$, & extracta iterum radice $x=\frac{3\pm5\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt{17\pm\frac{21\sqrt{3}}{2}}$.

Haud secus si proponatur æquatio hæcce $x^4-9x^3+15xx-27x+9=0$, scribendo -9, $+15$, -27, & $+9$, pro p, q, r, & s respective, emerget $-5\frac{1}{4}=\alpha$, $-50\frac{5}{8}=\beta$, & $2\frac{7}{64}=\zeta$. Ipsorum β & 2ζ, seu $-\frac{405}{8}$ & $\frac{135}{32}$ communes divisores sunt 3, 5, 9, 15, 27, 45, & 135; sed 9 quadratus est, & 3, 15, 27, 135 divisi per numerum 4 non relinquunt unitatem, ut ob imparem terminum p oporteret. His itaque rejectis restant soli 5 & 45 tentandi pro n. Ponamus primo $n=5$, & ipsius $\frac{\beta}{n}$ seu $-\frac{81}{8}$ divisores impares dimidiati nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$, tentandi erunt pro k. Si k ponatur $\frac{1}{2}$, quotus $-\frac{81}{4}$ qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, subductus de $\frac{1}{2}pk$ seu

$-\frac{9}{4}$ relinquit 18 pro $2l$, & $\frac{\alpha+nkk}{2}$ seu -2 est Q, & $QQ-s$, seu -5 dividi quidem potest per n seu 5, sed Quoti negativi -1 radix impossibilis est, quæ tamen deberet esse 9. Quare concludo k non esse $\frac{1}{2}$ & tento jam si sit $\frac{3}{2}$. Quotum qui oritur dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, seu $-\frac{81}{8}$ per $\frac{3}{2}$, nempe Quotum $-\frac{27}{4}$ subduco de $\frac{1}{2}pk$ seu $-\frac{27}{4}$ & restat o. Unde l jam nihil erit. Est autem $\frac{\alpha+nkk}{2}$ seu 3 æqualis Q, & $QQ-s$ nihil est; unde rursus l, qui hujus $QQ-s$ divisi per n radix est, invenitur nihil. Quamobrem his ita quadrantibus concludo esse $n=5$, $k=\frac{3}{2}$, $l=0$, & $Q=3$, adeoque addendo ad utramque partem æquationis propositæ terminos $nkkxx+2nlkx+nll$ id est $\frac{45}{4}xx$, & radicem quadraticam utrobique extrahendo prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, id est $xx-4\frac{1}{2}x+3=\sqrt{5}\times\frac{3}{2}x$.

Eadem methodo reducuntur etiam æquationes literales. Ut si fuerit $x^4-2ax^3\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}xx-2a^3x+a^4=0$, substituendo $-2a$, $2aa-cc$, $-2a^3$ & $+a^4$ pro p, q, r, & s respective, obtinebuntur $aa-cc=\alpha$, $-acc-a^3=\beta$, & $\frac{3}{4}a^4+\frac{1}{2}aacc-\frac{1}{4}c^4=\zeta$. Quantitatum β & 2ζ divisor communis est $aa+cc$ qui proinde erit n; & $\frac{\beta}{n}$ seu $-a$ divisores habet 1 & a. Sed quia n duarum est dimensionum, & $k\sqrt{n}$ non nisi unius esse debet, ideo k nullius erit, adeoque non potest esse a. Sit ergo $k=1$, & diviso $\frac{\beta}{n}$ per k aufer quotum $-a$ de $\frac{1}{2}pk$ seu $-a$ & restabit nihil pro l. Porro $\frac{\alpha+nkk}{2}$ seu aa est Q, & $QQ-s$ seu a^4-a^4 nihil est; & inde rursus prodit nihil pro l. Quod arguit quantitates n, k, l, & Q recte inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis propositæ terminis $nkkxx+2nklx+nll$, id est $aaxx+ccxx$, radicem utrobique extrahi posse, & extractione illa prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, id est $xx-ax+aa=$

+

$\pm x\sqrt{aa+cc}$. Et extracta iterum radice $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}$ + vel $-\sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Hactenus regulam applicui ad extractionem *radicum surdarum*: potest tamen eadem ad extractionem etiam *rationalium* applicari, si modo pro quantitate n usurpetur unitas; eoque pacto una vice examinare possumus utrum æquatio fractis & surdis terminis carens divisorem aliquem duarum dimensionum aut rationalem aut surdum admittat. Ut si æquatio $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$ proponatur, substituendo -1, -5, $+12$, & -6, pro p, q, r, & s respective invenientur $-5\frac{1}{4} = \alpha$, $9\frac{3}{8} = \beta$, & ponendo $n = 1$, Quantitatis $\frac{\beta}{n}$ seu $\frac{75}{8}$ divisores sunt $1, 3, 5, 15, 25, 75$: quorum dimidia (siquidem p sit impar) tentanda sunt pro k. Et si pro k tentemus $\frac{5}{2}$, fiet $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = -5$, & ejus dimidium $-\frac{5}{2} = l$. Item $\frac{\alpha + nkk}{2} = \frac{1}{2} = Q$, & $\frac{QQ - s}{n} = 6\frac{1}{4}$, cujus radix congruit cum l.

Concludo itaque quantitates n, k, l, Q recte inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis terminis $nkkxx + 2nklx + nll$, id est $6\frac{1}{4}xx - 12\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{4}$, radicem utrobique extrahi posse; & extractione illa prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \pm\sqrt{n} \times \overline{kx + l}$, id est $xx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \pm 1 \times 2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$, seu $xx - 3x + 3 = 0$, & $xx + 2x - 2 = 0$, adeoque per hasce duas æquationes quadraticas, æquationem propositam quadrato-quadraticam dividi posse. Sed hujusmodi divisores rationales expeditius inveniuntur per aliam methodum supra traditam.

Siquando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ multi sunt divisores ita ut omnes pro k tentare molestum fuerit, potest eorum numerus cito minui quærendo omnes divisores quantitatis $\alpha s - \frac{1}{4}rr$. Nam horum alicui aut imparis alicujus dimidio debet quantitas Q æqualis esse. Sic in exemplo novissimo $\alpha s - \frac{1}{4}rr$ est $-\frac{9}{2}$, è cujus divisoribus $1, 3, 9$ aut iisdem dimidiatis $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$, aliquis debet esse Q. Quare sigillatim tentando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ divisores dimidiatos $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, \frac{25}{2}$, & $\frac{75}{2}$ pro k, reji-

cio omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$, seu $-\frac{11}{4}+\frac{1}{2}kk$; id est Q esse aliquem è numeris 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. Scribendo autem $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{11}{2}$, &c. pro k, prodeunt respective $-\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $+\frac{1}{4}$, $+\frac{11}{2}$, &c. pro Q, è quibus soli $-\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ reperiuntur in prædictis numeris, 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, adeoque, cæteris rejectis, aut erit $k=\frac{3}{2}$, & $Q=-\frac{3}{2}$ aut $k=\frac{1}{2}$, & $Q=\frac{1}{2}$. Qui duo casus examinentur. Atque hactenus de æquationibus *quatuor* dimensionum.

Si æquatio sex *dimensionum reducenda est*, sit ea $x^6+px^5+qx^4+rx^3+sxx+tx+v=0$, & fac

$$q-\tfrac{1}{4}pp=\alpha. \quad r-\tfrac{1}{2}p\alpha=\beta. \quad s-\tfrac{1}{2}p\beta=\gamma.$$
$$\gamma-\tfrac{1}{4}\alpha\alpha=\zeta. \quad t-\tfrac{1}{2}\alpha\beta=\eta. \quad v-\tfrac{1}{4}\beta\beta=\theta.$$
$$\zeta\theta-\tfrac{1}{4}\eta\eta=\lambda.$$

Dein sumatur pro n, communis aliquis terminorum 2ζ, η, 2θ divisor integer & non quadratus, nec per numerum quadratum divisibilis, qui etiam per numerum 4 divisus relinquit unitatem; si modo terminorum p, r, t aliquis sit impar. Pro k sumatur divisor aliquis integer quantitatis $\frac{\lambda}{2nn}$ si p sit par, vel divisoris imparis dimidium si p sit impar, vel nihil si λ nihil sit. Pro Q, quantitas $\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{2}nkk$. Pro l divisor aliquis quantitatis $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ si Q sit integer; vel divisoris imparis dimidium si Q sit fractus denominatorem habens numerum 2; vel nihil si dividuum istud $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ sit nihil. Et pro R quantitas $\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}Qp+nkl$. Dein tenta si $RR-v$ dividi possit per n, & Quoti radix extrahi; & præterea si radix ista æqualis sit tam quantitati $\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}$ quam quantitati $\frac{QQ+pR-nll-s}{2nk}$. Si hæc omnia evenerint, dic radicem illam m; & vice æquationis propositæ scribe hanc $x^3+\frac{1}{2}pxx+Qx+R=\pm\sqrt{n\times\overline{kxx+lx+m}}$. Etenim hæc æquatio, quadrando partes & auferendo utrobique terminos ad dextram, producet æquationem propositam. Quod si ea omnia in nullo casu evenerint, reductio erit impossibilis, si modo prius constet æquationem per divisorem rationalem reduci non posse.

Exempli

Exempli gratia, proponatur æquatio $x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 \begin{matrix} -2aabb \\ +2a^3b \\ -4ab^3 \end{matrix} xx \begin{matrix} +3aab^4 \\ -a^4bb \end{matrix} = 0$, & scribendo $-2a$, $+2bb$, $+2abb$, $-2aabb+2a^3b-4ab^3$, 0, & $3aab^4-a^4bb$ pro p, q, r, s, t, & v respective, prodibunt $2bb-aa=\alpha$. $4abb-a^3=\beta$. $2a^3b+2aabb-4ab^3-a^4=\gamma$. $-b^4+2a^3b+3aabb-4ab^3-\frac{1}{2}a^4=\zeta$. $-\frac{1}{2}a^5+3a^3bb-4ab^4=\eta$. & $-aab^4+a^4bb-\frac{1}{4}a^6=\theta$. Et terminorum 2ζ, η, & 2θ communis divisor est $aa-2bb$, seu $2bb-aa$ perinde ut aa vel $2bb$ majus sit. Sed esto aa majus quam $2bb$, & $aa-2bb$ erit n. Debet enim n semper affirmativum esse. Porro $\frac{\zeta}{n}$ est $-\frac{1}{2}aa+2ab+\frac{1}{2}bb$, $\frac{\eta}{n}$ est $-\frac{1}{2}a^3+2abb$, & $\frac{\theta}{n}$ est $\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}aabb$, adeoque $\frac{\zeta}{2n} \times \frac{\theta}{n} - \frac{\eta\eta}{8nn}$ seu $\frac{\lambda}{2nn}$ est $\frac{3}{8}a^6-\frac{1}{4}a^5b-\frac{3}{8}a^4bb+\frac{1}{2}a^3b^3-\frac{3}{8}aab^4$, cujus divisores sunt 1, a, aa; sed quia $\sqrt{n} \times k$ non nisi unius dimensionis esse potest, & $\sqrt{n}$ unius est, ideo k nullius erit; proinde non nisi numerus esse potest. Quare rejectis a & aa, restat solum 1 pro k. Præterea $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}nkk$ dat nihil pro Q, & $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ etiam nihil est; adeoque l, qui ejus divisor esse debet, erit nihil. Denique $\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}pQ+nkl$ dat abb pro R. Et $RR-v$, est $-2aab^4+a^4bb$, quod dividi potest per n seu $aa-2bb$, & quoti $aabb$ radix extrahi, & radix illa negative sumpta, nempe $-ab$, indefinitæ quantitati $\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}$ seu $\frac{0}{0}$ non est inæqualis, quantitati vero definitæ $\frac{QQ+pR-nll-s}{2nk}$ æqualis est. Quamobrem radix illa $-ab$ erit m, & loco æquationis propositæ scribi potest $x^3+\frac{1}{2}pxx+Qx+R=\sqrt{n} \times \overline{kxx+lx+m}$, i. e. $x^3-axx+abb=\sqrt{aa-2bb} \times \overline{xx-ab}$. Cujus conclusionis veritatem probare potes quadrando partes æquationis inventæ & auferendo terminos ad dextram ex utraque parte. Ea enim operatione producetur æquatio $x^6-2ax^5+2bbx^4+2abbx^3-2aabbxx+2a^3bxx-4ab^3xx+3aab^4-a^4bb=0$, quæ reducenda proponebatur.

Si æquatio est octo *dimensionum sit ea* $x^8+px^7+qx^6+rx^5+sx^4+tx^3+vxx+wx+z=0$, & fiat $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$. $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$. $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\gamma$. $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta$. $v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\varepsilon$. $w-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta$. & $z-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta$. Et terminorum 2δ, 2ε, 2ζ, 8η, quære communem divisorem qui integer sit, & non quadratus nec per quadratum divisibilis, quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem, si modo terminorum alternorum p, r, t, w aliquis sit impar. Si nullus est ejusmodi divisor communis, certum est æquationem per extractionem surdæ radicis quadraticæ reduci non posse, & si non potest ea ita reduci, vix occurret illarum omnium quatuor quantitatum divisor communis. Opusculum igitur hactenus institutum examinatio quædam est utrum æquatio reducibilis sit necne, adeoque cum ejusmodi reductiones raro possibiles sint, finem operi ut plurimum imponet.

Et simili ratione si æquatio sit decem, duodecim, vel plurium dimensionum, impossibilitas reductionis cognosci potest.

Ut si ea sit $x^{10}+px^9+qx^8+rx^7+sx^6+tx^5+vx^4+ax^3+bxx+cx+d=0$, faciendum erit $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$, $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$, $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\gamma$, $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta$, $v-\frac{1}{2}p\delta-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\varepsilon$, $a-\frac{1}{2}\alpha\delta-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta$, $b-\frac{1}{2}\beta\delta-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta$, $c-\frac{1}{2}\gamma\delta=\theta$, $d-\frac{1}{4}\delta\delta=\kappa$, & quærendus communis divisor terminorum quinque 2ε, 2ζ, 8η, 4θ, 8κ, qui integer sit & non quadratus, quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem si modo terminorum alternorum p, r, t, a, c aliquis sit impar.

Sic si *duodecim* dimensionum æquatio sit $x^{12}+px^{11}+qx^{10}+rx^9+sx^8+tx^7+vx^6+ax^5+bx^4+cx^3+dxx+ex+f=0$, faciendum erit $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$, $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$, $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\gamma$, $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta$, $v-\frac{1}{2}p\delta-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\varepsilon$, $a-\frac{1}{2}p\varepsilon-\frac{1}{2}\alpha\delta-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta$, $b-\frac{1}{2}\alpha\varepsilon-\frac{1}{2}\beta\delta-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta$, $c-\frac{1}{2}\beta\varepsilon-\frac{1}{2}\gamma\delta=\theta$, $d-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon-\frac{1}{4}\delta\delta=\kappa$, $e-\frac{1}{2}\delta\varepsilon=\lambda$, $f-\frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon=\mu$, & quærendus communis divisor integer & non quadratus terminorum sex 2ζ, 8η, 4θ, 8κ, 4λ, 8μ qui per 4 divisus relinquat unitatem, si modo terminorum alternorum p, r, t, a, c, e aliquis sit impar.

Atque ita in infinitum progredi licebit, & æquatio proposita semper per extractionem surdæ radicis quadraticæ irreducibilis erit ubi ejusmodi divisor communis nullus est. Siquando vero ejusmodi divisor

visor n inventus spem faciat futuræ reductionis, potest ea institui insistendo vestigiis operis quod in æquatione octo dimensionum subjungimus.

Quære numerum quadratum cui per n multiplicato ultimus æquationis terminus z, sub signo proprio adnexus quadratum numerum efficit. Id autem expedite fiet si ad z ubi n est par vel ad $4z$ ubi n est impar successive addantur n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, $11n$, & deinceps donec summa æqualis fiat numero alicui in tabula numerorum quadratorum quam ad manus esse suppono. Et si nullus ejusmodi quadratus numerus prius occurrit quam summæ illius radix quadratica aucta radice quadratica excessus illius summæ supra ultimum æquationis terminum, quadruplo major sit quam maximus terminorum æquationis propositæ p, q, r, s, t, v, &c. non opus erit rem ultra tentare. Æquatio enim reduci non potest. Sed si ejusmodi numerus quadratus prius occurrit, sit ejus radix S, si n est par, vel $2S$ si n est impar; & $\sqrt{\frac{SS-z}{n}}$ dic b. Debent autem S & b esse numeri integri si n est par, at si n impar est, possunt esse fracti denominatorem habentes numerum binarium. Et si unus eorum fractus est, alter fractus esse debet. Quod idem de numeris R & m, Q & l, p & k, post inveniendis observandum est. Et omnes numeri S & b, qui intra præfatum limitem inveniri possunt in catalogum referendi sunt.

Postea pro k tentandi sunt omnes numeri successive qui non efficiunt $nk \pm \frac{1}{2}p$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & ponendum est in omni casu $\frac{nkk+\alpha}{2}=Q$. Dein pro l tentandi sunt successive numeri omnes qui non efficiunt $nl \pm Q$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & in omni tentamine ponendum $\frac{-npkk+2\beta}{4}+nkl=R$. Denique pro m tentandi sunt successive omnes numeri qui non efficiunt $nm \pm R$ quadruplo majus quam maximus terminorum æquationis, & videndum an in casu quovis si fiat $s-QQ-pR+nll=2H$, & $H+nkm=S$, sit S aliquis numerorum qui prius pro S in Catalogum relati erat; & præterea

terea si alter numerus ei S respondens, qui pro b in eundem Catalogum relatus erat sit his tribus $\frac{2RS-w}{2nm}$, $\frac{2QS+RR-v-nmm}{2nl}$ & $\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}$ æqualis. Si hæc omnia in aliquo casu evenerint, vice æquationis propositæ scribenda erit hæcce $x^4+\frac{1}{2}px^3+Qxx+Rx+S=\sqrt{n}\times\overline{kx^3+lxx+mx+b}$.

Exempli gratia proponatur æquatio $x^8+4x^7-x^6-10x^5+5x^4-5x^3-10xx-10x-5=0$. Et erit $q-\frac{1}{4}pp=-1-4=-5=\alpha$. $r-\frac{1}{2}p\alpha=-10+10=0=\beta$. $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=5-\frac{25}{4}=-\frac{5}{4}=\gamma$. $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=-5+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}=\delta$. $v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=-10-\frac{25}{8}=-\frac{105}{8}=\varepsilon$. $w-\frac{1}{2}\beta\gamma=-10=\zeta$. $z-\frac{1}{4}\gamma\gamma=-5-\frac{25}{64}=-\frac{345}{64}=\eta$. Ergo 2δ, 2ε, 2ζ, 8η, respective, sunt -5, $-\frac{105}{4}$, -20, & $-\frac{345}{8}$, & earum divisor communis 5, qui per 4 divisus relinquit 1, perinde ut ob terminum imparem s oportuit. Cum itaque inventus sit divisor communis n seu 5 qui spem facit futuræ reductionis, quoniam iste impar est, ad $4z$ seu -20 successive addo $n, 3n, 5n, 7n, 9n$, &c. seu $5, 15, 25, 35, 45$, &c. & prodeunt -15. 0. 25. 60. 105. 160. 225. 300. 385. 480. 585. 700. 825. 960. 1105. 1260. 1425. 1600. Ex quibus solum 0. 25. 225, & 1600 quadrati sunt. Quare horum radices dimidiatæ 0, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, 20, in catalogum referendæ sunt pro S, & $\sqrt{\frac{SS-z}{n}}$, id est 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, 9, respective pro b. Sed quia $S+nb$ si scribatur 20 pro S & 9 pro b, fit 65 numerus major quadruplo maximi terminorum æquationis, ideo rejicio 20 & 9, & reliquos solum refero in tabulam ut sequitur.

b	$1.$	$\frac{3}{2}.$	$\frac{7}{2}.$
S	$0.$	$\frac{5}{2}.$	$\frac{15}{2}.$

His ita dispositis, tento pro k numeros omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}p\pm nk$ seu $2\pm5k$ majus quadruplo maximi termini æquationis 40, id est numeros -8. -7. -6. -5. -4. -3. -2. -1. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7, ponendo $\frac{nkk+\alpha}{2}$ seu $\frac{5kk-5}{2}$ id est numeros $\frac{315}{2}$. 120. $\frac{175}{2}$. 60. $\frac{75}{2}$. 20. $\frac{15}{2}$. 0. $-\frac{5}{2}$. 0. $\frac{15}{2}$. 20. $\frac{75}{2}$. 60. $\frac{175}{2}$. 120.

re-

respective pro Q. Imo vero cum $Q \pm nl$, & multo magis Q non debeat majus esse quam 40, rejiciendos esse sentio $\frac{315}{2}$. 120. $\frac{175}{2}$ & 60, & qui his respondent $-8.\ -7.\ -6.\ -5.\ 5.\ 6.\ 7.$ adeoque solos $-4.\ -3.\ -2.\ -1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4$ pro k & $\frac{75}{2}.\ 20.\ \frac{15}{2}.\ 0.\ -\frac{5}{2}.\ 0.\ \frac{15}{2}.\ 20.\ \frac{75}{2}.$ pro Q respective tentandos. Tentemus autem -1 pro k & 0 pro Q, & in hoc casu pro l tentandi deinceps erunt successive omnes numeri qui non efficiunt $Q \pm nl$ majus quam 40, id est omnes numeri inter 10 & -10, & pro R respective numeri $\frac{2\beta - npkk}{4} + nkl$, seu $-5 - 5l$ id est $-55.\ -50.\ -45.\ -40.\ -35.\ -30.\ -25.\ -20.\ -15.\ -10.\ -5.\ 0.\ 5.\ 10.\ 15.\ 20.\ 25.\ 30.\ 35.\ 40.\ 45$, quorum tamen tres priores & ultimum quia majores quam 40 negligere licebit. Tentemus autem -2 pro l & 5 pro R, & in hoc casu pro m tentandi praeterea erunt omnes numeri qui non efficiunt $R \pm nm$ seu $5 \pm 5m$ majus quam 40, id est numeri omnes inter 7 & -9, & videndum an si ponendo $s - QQ - pR + nll$, id est $5 - 20 + 20$ seu $5 = 2H$, sit $H + nkm$ seu $\frac{5}{2} - 5m = S$, id est si ex his numeris $\frac{-65}{2}.\ \frac{-55}{2}.\ \frac{-45}{2}.\ \frac{-35}{2}.\ \frac{-25}{2}.\ \frac{-15}{2}.\ \frac{-5}{2}.\ \frac{5}{2}.\ \frac{15}{2}.\ \frac{25}{2}.\ \frac{35}{2}.\ \frac{45}{2}.\ \frac{55}{2}.\ \frac{65}{2}.\ \frac{75}{2}.\ \frac{85}{2}$, aliquis aequalis sit alicui numerorum $0.\ \pm\frac{5}{2}.\ \pm\frac{15}{2}$ qui prius in tabulam pro S relati erant. Et hujusmodi quatuor occurrunt $-\frac{15}{2}.\ -\frac{5}{2}.\ \frac{5}{2}.\ \frac{15}{2}$ quibus respondent $\pm\frac{7}{2}.\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{1}{2}.\ \pm\frac{7}{2}$ pro b in eadem tabula scripti, ut & $2.\ 1.\ 0.\ -1$ pro m substitui. Verum tentemus $-\frac{5}{2}$ pro S, 1 pro m, & $\pm\frac{3}{2}$ pro b, & fiet $\frac{2RS - w}{2nm} = \frac{-25+10}{10} = -\frac{3}{2}$, & $\frac{2QS + RR - v - nmm}{2nl} = \frac{25+10-5}{-20} = -\frac{3}{2}$, & $\frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk} = \frac{-10+5+20}{-10} = -\frac{3}{2}$, Quare cum prodeat omni casu $-\frac{3}{2}$ seu b, concludo numeros omnes recte inventos esse, adeoque vice aequationis propositae scribendum esse $x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qxx + Rx + S = \sqrt{n} \times \overline{kx^3 + lxx + mx + b}$, id est $x^4 + 2x^3 + 5x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{5}$

$\times \overline{-x^3 - 2xx + x - 1}|^{\frac{1}{2}}$. Etenim quadrando partes hujus, producetur æquatio illa octo dimenſionum quæ ſub initio proponebatur.

Quod ſi tentando caſus omnes numerorum, prædicti valores omnes ipſius b nullo in caſu inter ſe conſenſiſſent, argumento fuiſſet æquationem per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ reduci non potuiſſe.

Deberent autem aliqua hic in operis abbreviationem annotari, ſed quæ brevitatis cauſa prætereo, cum tantarum reductionum perexiguus ſit uſus, & rei poſſibilitatem potius quam praxin commodiſſimam voluerim exponere. Sunt igitur hæ reductiones æquationum per extractionem *ſurdæ radicis quadraticæ.*

Adjungere jam liceret reductiones æquationum per *extractionem ſurdæ radicis cubicæ*, ſed & has, ut quæ perraro utiles ſint, brevitatis gratia prætereo.

Sunt tamen reductiones quædam *cubicarum æquationum* vulgo notæ, quas, ſi penitus præterirem, Lector fortaſſe deſideraret. Proponatur æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, cujus ſecundus terminus deeſt. Ad hanc enim formam æquationem omnem cubicam reduci poſſe conſtat ex præcedentibus. Et ſupponatur x eſſe $= a + b$. Erit $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ (id eſt x^3) $+ qx + r = 0$. Sit $3aab + 3abb$ (id eſt $3abx$) $+ qx = 0$, & erit $a^3 + b^3 + r = 0$. Per priorem æquationem eſt $b = -\frac{q}{3a}$, & cubice $b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}$. Ergo per poſteriorem eſt $a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0$, ſeu $a^6 + ra^3 = \frac{q^3}{27}$, & per extractionem affectæ radicis quadraticæ $a^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. Extrahe radicem cubicam & habebitur a. Et ſupra erat $-\frac{q}{3a} = b$, & $a + b = x$. Ergo $a - \frac{q}{3a}$ radix eſt æquationis propoſitæ.

Exempli gratia proponatur æquatio $y^3 - 6yy + 6y + 12 = 0$. Ad tollendum ſecundum æquationis hujus terminum ponatur $x + 2 = y$, & orietur $x^3 * - 6x + 8 = 0$, ubi eſt $q = -6$, $r = 8$, $\frac{1}{4}rr = 16$,

q^3

$\frac{q^3}{27}=-8$, $a^3=-4\pm\sqrt{8}$, $a-\frac{q}{3a}=x$, & $x+2=y$, id est
$2+\sqrt[3]{-4\pm\sqrt{8}}+\frac{2}{\sqrt[3]{-4\pm\sqrt{8}}}=y$.

Et hoc modo erui possunt radices omnium cubicarum æquationum ubi q affimativum est; vel etiam ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ non majus quam $\frac{1}{4}rr$, *id est ubi duæ ex radicibus æquationis sunt impossibiles.* At ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ simul majus quam $\frac{1}{4}rr$, fit $\sqrt{\frac{1}{4}rr-\frac{q^3}{27}}$ quantitas impossibilis, atque adeo æquationis radix x vel y, hoc casu impossibilis erit. Scilicet hoc casu *tres sunt radices possibiles* quæ omnes eodem modo se habent ad æquationis terminos q & r, & indifferenter designantur per literam x vel y, adeoque omnes eadem deberent lege erui & exprimi qua una aliqua eruitur & exprimitur: *Sed omnes tres lege præfata exprimere impossibile est.* Quantitas $a-\frac{q}{3a}$ qua x designatur multiplex esse non potest, eaque de causa Hypothesis quod x, hoc in casu ubi triplex est, æqualis esse potest binomio $a-\frac{q}{3a}$, seu $a+b$ cujus nominum cubi a^3+b^3 conjunctim æquentur r, & triplum rectangulum $3ab$ æquetur q, plane impossibilis est; & ex hypothesi impossibili conclusionem impossibilem colligi mirum esse non debet.

Est & alius modus has radices exprimendi. Nimirum de a^3+b^3+r id est de nihilo, aufer a^3+r, seu $\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}$, & restabit $b^3=-\frac{1}{2}r\mp\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}$. Est itaque $a=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$, & $b=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$; vel $a=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$, & $b=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$,

adeoque horum summa $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$, erit $=x$.

Possunt etiam æquationum biquadraticarum radices mediantibus cubicis erui & exprimi.

Tollendus est autem primum secundus æquationis terminus. Sit æquatio resultans $x^4+qxx+rx+s=0$. Pone hanc multiplicatione duarum $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$ generari, id est eandem esse cum hac $x^4 * \begin{matrix}+f\\+g\\-ee\end{matrix}\,xx\begin{matrix}+eg\\-ef\end{matrix}\,x+fg=0$, & collatis terminis fiet $f+g-ee=q$, $eg-ef=r$, & $fg=s$. Quare $q+ee=f+g$, $\frac{r}{e}=g-f$, $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$. $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$. $\frac{qq+2eeq+e^4-\frac{rr}{ee}}{4}(=fg)=s$, & per reductionem $e^6+2qe^4\begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix}\,ee-rr=0$. Pro ee scribo y, & fiet $y^3+2qyy\begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix}\,y-rr=0$, æquatio cubica cujus terminus secundus tolli potest, & radix deinceps per regulam præcedentem vel secus extrahi. Dein habita illa radice regrediendum erit ponendo $\sqrt{y}=e$, $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$, $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$, & æquationes duæ $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$, extractis earum radicibus dabunt quatuor radices æquationis biquadraticæ $x^4+qxx+rx+s=0$, nimirum $x=-\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-f}$, & $x=\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-g}$. Ubi notandum est quod si æquationis biquadraticæ radices quatuor possibiles sunt, æquationis cubicæ $y^3+2qyy\begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix}\,y-rr=0$ radices tres possibiles erunt, atque adeo per regulam præcedentem extrahi nequeunt. *Sic & si æquationis quinque vel plurium dimensionum radices affectæ in radices non affectas mediis æquationis terminis quoque pacto sublatis convertantur, illa radicum expressio semper erit impossibilis ubi plures quam* una

una radix in æquatione imparium dimensionum possibiles sunt, aut plures quam duæ in æquatione parium dimensionum quæ per extractionem surdæ radicis quadraticæ methodo supra exposita reduci nequeunt.

Docuit *Cartesius* æquationem biquadraticam per regulas ultimo traditas reducere. *E. g.* proponatur æquatio à nobis supra reducta $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$. Tolle secundum terminum scribendo $v + \frac{1}{4}$ pro x, & orietur $v^4 - \frac{43}{8}vv + \frac{75}{8}v - \frac{851}{256} = 0$. Ad tollendas fractiones scribe $\frac{1}{4}z$ pro v, & orietur $z^4 - 86zz + 600z - 851 = 0$. Hic est $-86 = q$, $600 = r$, & $-851 = s$, adeoque $y^3 + 2qyy \begin{matrix} +qq \\ -4s \end{matrix} y - rr = 0$, substitutis æquipollentibus fiet $y^3 - 172yy + 10800y - 360000 = 0$. Ubi tentando omnes ultimi termini divisores $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$, & deinceps usque ad 100 invenietur tandem $y = 100$. Quod idem multo expeditius per methodum à nobis supra expositam invenire potuit. Dein habito y, radix ejus 10 erit e, & $\frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2}$, id est $\frac{-86 + 100 - 60}{2}$, seu -23 erit f, & $\frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2}$ seu 37 erit g, adeoque æquationes $xx + ex + f = 0$, & $xx - ex + g = 0$, scripto z pro x, & substitutis æquipollentibus evadent $zz + 10z - 23 = 0$, & $zz - 10z + 37 = 0$. Restitue v pro $\frac{1}{4}z$, & orientur $vv + 2\frac{1}{2}v - \frac{23}{16} = 0$, & $vv - 2\frac{1}{2}v + \frac{37}{16} = 0$. Restitue insuper $x - \frac{1}{4}$ pro v, & emergent $xx + 2x - 2 = 0$, & $xx - 3x + 3 = 0$, æquationes duæ quarum radices quatuor $x = -1 \pm \sqrt{3}$, & $x = 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$, eædem sunt cum radicibus quatuor æquationis biquadraticæ sub initio propositæ $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$. Sed hæ facilius per methodum inveniendi divisores à nobis supra explicatam invenire potuerunt.



ÆQUA-

ÆQUATIONUM

Constructio linearis.

Hactenus æquationum proprietates; transmutationes, limites & omnis generis reductiones, docui. Demonstrationes non semper adjunxi quoniam satis faciles mihi visæ sunt, & nonnunquam absque nimiis ambagibus tradi non possent. Restat jam tantum ut æquationum postquam ad formam commodissimam reductæ sunt, radices in numeris extrahere doceam. Et hic præcipua difficultas est in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis. Id quod commodissime per æquationis constructionem aliquam seu Geometricam sive Mechanicam consit. Qua de causa non pigebit hujusmodi constructiones aliquas subjungere.

Veteres, ut ex Pappo discimus, trisectionem anguli, & inventionem duarum medie proportionalium, sub initio per rectam lineam & circulum, frustra aggressi sunt. Postea considerare cœperunt alias permultas lineas, ut Conchoidem, Cissoidem, & Conicas sectiones, & per harum aliquas solverunt Problemata. Tandem re penitius examinata, & Conicis sectionibus in Geometriam receptis Problemata distinxerunt in tria genera: *Plana* quæ per lineas, à plano originem derivantes, Rectam nempe & Circulum solvi possint; *Solida* quæ per lineas ortum à solidi id est Coni consideratione derivantes solvebantur; & *Linearia* ad quorum solutionem requirebantur lineæ magis compositæ. Et juxta hanc distinctionem, problemata solida per alias lineas quam Conicas sectiones solvere à Geometria alienum est; præsertim si nullæ aliæ lineæ præter rectam, circulum, & Conicas sectiones in Geometriam recipiantur. At Recentiores longius progressi receperunt lineas omnes in Geometriam quæ per æquationes exprimi possunt, & pro dimensionibus æquationum distinxerunt lineas illas in genera, legemque tulerunt non licere Problema

per

per lineam superioris generis construere quod construi potest per lineam inferioris. In lineis contemplandis, & eruendis earum proprietatibus, distinctionem earum in genera juxta dimensiones æquationum per quas definiuntur laudo. At æquatio non est, sed descriptio quæ curvam Geometricam efficit. Circulus linea Geometrica est, non quod per æquationem exprimi potest; sed quod descriptio ejus postulatur. Æquationis simplicitas non est, sed descriptionis facilitas, quæ lineam ad constructiones Problematum prius admittendam esse indicat. Nam æquatio ad Parabolam simplicior est quam æquatio ad circulum; & tamen circulus ob simpliciorem descriptionem prius admittitur. Circulus & Coni sectiones si æquationum dimensiones spectentur ejusdem sunt ordinis, & tamen circulus in constructione problematum non connumeratur cum his, sed ob simplicem descriptionem deprimitur ad ordinem inferiorem lineæ rectæ; ita ut per circulum construere quod per rectas construi potest, non sit illicitum; per Conicas vero sectiones construere quod per circulum construi potest vitio vertatur. Aut igitur legem à dimensionibus æquationum in circulo observandam esse statue, & sic distinctionem inter problemata plana & solida ut vitiosam tolle; aut concede legem illam in lineis superiorum generum non ita observandam esse quin aliquæ ob simpliciorem descriptionem præferantur aliis ejusdem ordinis, & in constructione Problematum cum lineis inferiorum ordinum connumerentur. In constructionibus quæ sunt æque Geometricæ præferendæ semper sunt simpliciores. Hæc lex omni exceptione major est. Ad simplicitatem vero constructionis expressiones Algebraicæ nil conferunt. Solæ descriptiones linearum hic in censum veniunt. Has solas considerabant Geometræ qui circulum conjungebant cum recta. Prout hæ sunt faciles vel difficiles constructio facilis vel difficilis redditur. Adeoque à rei natura alienum est leges constructionibus aliunde præscribere. Aut igitur lineas omnes præter rectam & circulum & forte Conicas sectiones è Geometria cum Veteribus excludamus, aut admittamus omnes secundum descriptionis simplicitatem. Si Trochoides in Geometriam reciperetur, liceret ejus beneficio angulum in data ratione secare. Numquid ergo reprehenderes siquis hac linea ad dividendum angulum in ratione numeri ad numerum uteretur, & contenderes hanc lineam

per

qualicunque sollicitum esse, qua radices æquationum in numeris proxime assequar. Cujus rei gratia præmitto hoc Problema Lemmaticum.

Inter datas duas lineas AB, AC rectam datæ longitudinis BC ponere quæ producta transeat per datum punctum P.

Si circa polum P gyret linea BC, & simul termino ejus C incedat super recta AC, ejus alter terminus B describet Conchoidem Veterum. Secet hæc lineam AB in puncto B. Junge PB, & ejus pars BC erit recta quam ducere oportuit. Et eadem lege linea BC duci potest ubi vice rectæ AC linea aliqua curva adhibetur. Tab. IX. Fig. 1.

Sicui constructio hæcce per Conchoidem minus placeat, potest alia per Conicam sectionem ejus vice substitui. A puncto P ad rectas AD, AE age PD, PE constituentes parallelogrammum EADP, & à punctis C ac D ad rectam AB demitte perpendicula CF, DG, ut & à puncto E ad rectam AC versus A productam perpendiculum EH, & dictis $AD=a$. $PD=b$. $BC=c$. $AG=d$, $AB=x$, & $AC=y$. Erit $AD.AG::AC.AF$, adeoque $AF=\frac{dy}{a}$. Erit & $AB.AC::PD.CD$, seu $x.y::b.a-y$. Ergo $by=ax-yx$, quæ æquatio est ad Hyperbolam. Rursus per 13. II. *Elem.* erit $BCq=ACq+ABq-2FAB$, id est $cc=yy+xx-\frac{2dxy}{a}$. Prioris æquationis partes ductas in $\frac{2d}{a}$ aufer de partibus hujus, & restabit $cc-\frac{2bdy}{a}=yy+xx-2dx$, æquatio ad circulum, ubi x & y ad rectos sunt angulos. Quare si hasce duas lineas Hyperbolam & Circulum ope harum æquationum componas, earum intersectione habebis x & y, seu AB & AC quæ positionem rectæ BC determinant. Componentur autem lineæ illæ ad hunc modum.

Duc rectas duas quasvis KL æqualem AD, & KM æqualem PD Tab. IX. Fig. 2.

P D continentes angulum rectum M K L. Comple parallelogrammum K L M N, & asymptotis L N, M N per punctum K describe Hyperbolam I K X.

In K M versus K producta cape K P æqualem A G & K Q æqualem B C. Et in K L producta versus K cape K R æqualem A H, & R S æqualem R Q. Comple parallelogrammum P K R T, & centro T intervallo T S describe circulum. Secet hic Hyperbolam in puncto X. Ad K P demitte perpendiculum X Y, & erit X Y æqualis A C & K Y æqualis A B. Quæ duæ lineæ A C & A B vel una earum cum puncto P determinant positionem quæsitam rectæ B C. Cui constructioni demonstrandæ, & ejus casibus secundum casus Problematis determinandis non immoror.

Hac, inquam, constructione solvi potest Problema sicui ita visum sit. Sed hæc solutio magis composita est quam ut usibus ullis inservire possit. Nuda speculatio est, & speculationes Geometricæ tantum habent elegantiæ quantum simplicitatis, tantumque laudis merentur quantum utilitatis secum afferunt. Ea de causa constructionem per Conchoidem præfero ut multo simpliciorem, & non minus Geometricam; & quæ resolutioni æquationum à nobis propositæ optime conducit. Præmisso igitur præcedente Lemmate construimus Geometrice Problemata cubica, & quadrato-quadratica (*utpote quæ ad cubica reduci possunt*) ut sequitur.

TAB. IX. Fig. 3. 4. 5. *Proponatur æquatio cubica* $x^3 * + qx + r = 0$, *cujus terminus secundus deest, tertius vero sub signo suo designatur per* $+q$ *&* *quartus per* $+r$.

Duc quamlibet K A quam dic n. In K A utrinque producta cape $KB = \frac{q}{n}$ ad easdem partes cum K A si habeatur $+q$, aliter ad contrarias. Biseca B A in C, & centro K radio K C fac circulum C X, cui inscribe rectam C X æqualem $\frac{r}{nn}$, & produc eam utrinque. Dein junge A X & produc eam utrinque. Denique inter has lineas C X & A X inscribe E Y ejusdem longitudinis cum C A, quæque producta transeat per punctum K, & X Y erit radix æquationis. Et ex his radicibus affirmativæ erunt quæ cadunt ad partes X versus C, & negativæ quæ cadunt ad partes contrarias, si habeatur $+r$, & contra si habeatur $-r$.

De-

Demonstratio.

Ad demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

LEM. I. *Est YX ad AK ut CX ad KE.* Etenim age KF parallelam CX, & ob similia triangula ACX, AKF, & EYX, EKF, erit AC ad AK ut CX ad KF, & YX ad YE seu AC ut KF ad KE, adeoque ex æquo perturbate YX ad AK ut CX ad KE. Q. E. D.

LEM. II. *Est YX ad AK ut CY ad AK+KE.* Nam componendo est YX ad AK ut YX+CX, id est CY ad AK+KE. Q. E. D.

LEM. III. *Est KE−BK ad YX ut YX ad AK.*

Nam per 12. II. *Elem.* est $YKq - CKq = CYq - CY \times CX = CY \times YX$, hoc est si Theorema resolvatur in proportionem CY ad YK−CK ut YK+CK ad YX. Sed est $YK - CK = YK - YE + CA - CK = KE - BK$. Et $YK + CK = YK - YE + CA + CK = KE + AK$. Adeoque est CY ad KE−BK ut KE+AK ad YX. Sed per *Lemma secundum* erat CY ad KE+AK ut YX ad AK. Ergo ex æquo est YX ad KE−BK ut AK ad YX. Seu KE−BK ad YX ut YX ad AK. Q. E. D.

His præmissis Demonstrabitur Theorema ut sequitur. In *primo Lemmate* erat YX ad AK ut CX ad KE, seu $KE \times YX = AK \times CX$. In *tertio* erat KE−BK ad YX ut YX ad AK. Unde si prioris rationis termini ducantur in YX fiet $KE \times YX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK, id est $AK \times CX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK, & ductis extremis & mediis in se $AKq \times CX - AK \times BK \times YX = YX\ cub.$ Denique pro YX, AK, BK, & CX restitutis x, n, $\frac{q}{n}$, & $\frac{r}{nn}$ orietur $r - qx = x^3$. Q. E. D. Quod vero ad signorum variationes attinet, istis secundum casus Problematum determinandis non immoror.

Proponatur jam æquatio cujus tertius terminus deest $x^3 + pxx + r = 0$. Et ad ejus constructiones assumpto quolibet n, cape in recta aliqua longitudines duas $KA = \frac{r}{nn}$, & $KB = p$, idque ad easdem partes si r & p habeant eadem signa, aliter ad contrarias. Biseca BA in C, & centro K radio KC describe circulum cui inscribe CX æqualem

n, & produc eam utrinque. Item junge AK, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inscribe EY ejusdem longitudinis cum CA, ita ut ea si producatur transeat per K, & KE erit radix æquationis. Radices autem affirmativæ sunt ubi punctum Y cadit à parte puncti X versus C, & negativæ ubi punctum Y cadit ad alteras partes puncti X si modo habeatur $+r$, & contra si habeatur $-r$.

Ad hujus Propositionis demonstrationem Schemata & Lemmata de priori propositione mutuo sumantur, & *Demonstratio* erit ut sequitur.

Per *Lemma* 1, erat YX ad AK ut CX ad KE seu $YX \cdot KE = AK \times CX$, & per *Lemma* 3, KE − KB ad YX ut YX ad AK, aut (sumpto KB ad contrarias partes) KE + KB ad YX ut YX ad AK, adeoque KE + KB in KE ad YX × KE, seu AK × CX ut YX ad AK, seu CX ad KE. Quare ductis extremis & mediis in se, est KE *cub.* $+ KB \times KEq = AK \times CXq$, & ipsarum KE, KB, AK, & CX restitutis valoribus supra assignatis, $x^3 + pxx = r$.

Proponimus jam æquationem trium dimensionum $x^3 + pxx + qx + r = 0$, nullo termino carentem, & cujus tres radices non sunt omnes affirmativæ neque omnes negativæ.

TAB. IX. Fig. 6. Et primo si terminus q *negativus* est, in recta aliqua KB capiantur longitudines duæ $KA = \frac{r}{q}$ & $KB = p$, idque ad easdem partes puncti K si p & $\frac{r}{q}$ habent signa diversa; aliter ad contrarias. Biseca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale radici quadraticæ termini q: Et inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inscribatur recta EY quæ æqualis sit rectæ AC, & producta transeat per punctum K, atque KE erit radix æquationis, quæ quidem affirmativa erit si punctum X cadat inter puncta A & E, negativa vero si punctum E cadat ad partes puncti X versus A.

Quod si terminus q *affirmativus* est, in recta KB capiantur longitu-

gitudines illæ duæ $KA=\sqrt{\frac{-r}{p}}$, & $KB=\frac{q}{KA}$, idque ad easdem partes puncti K, si $\sqrt{\frac{-r}{p}}$ & $\frac{q}{KA}$ habent signa diversa; aliter ad contrarias: Biseca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale termino p: & inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inscribatur recta EY quæ æqualis sit rectæ AC, & producta transeat per punctum K, atque XY erit radix æquationis; quæ quidem negativa erit si punctum x cadat inter puncta A & E, affirmativa vero si punctum Y cadat ad partes puncti X versus punctum C.

Demonstratio casus prioris.

Per *Lemma primum* erat KE ad CX ut AK ad YX, & ita (componendo) est KE+AK, id est KY+KC ad CX+YX, id est CY. Sed in triangulo rectangulo KCY est YCq æquale YKq —KCq, id est æquale KY+KC in KY—KC, & resolvendo terminos æquales in proportionales, KY+KC ad CY ut CY ad KY—KC, seu KE+AK ad CY ut CY ad EK—KB. Quare cum in hac proportione fuerit KE ad CX; duplicetur proportio, & erit KEq ad CXq ut KE+AK ad KE—KB; & ductis extremis & mediis in se KE *cub.* —KB×KEq=CXq×KE+CXq ×AK. Et restitutis valoribus supra assignatis $x^3-pxx=qx+r$.

Demonstratio casus secundi.

Per *Lemma primum* est KE ad CX ut AK ad YX, ductisque extremis & mediis in se fit KE×YX=CX×AK. Scribe ergo in superioribus KE×YX pro CX×AK, & fiet KE *cub.* —KB ×KEq=CXq×KE+CX×KE×YX. Et applicatis omnibus ad KE erit KEq—KB×KE=CXq+CX×YX: ductisque omnibus in AK habebitur AK×KEq—AK×KB×KE=AK ×CXq+AK×CX×YX: Ac rursus scripto KE×YX pro CX×AK, fiet AK×KEq—AK×KB KE=KE×YX×CX+KE×YXq: & applicatis omnibus ad KE orietur AK×KE—AK×KB=YX ×CX

$\times CX + YXq$: ductisque omnibus in YX emerget $AK \times KE \times YX - AK \times KB \times YX = YXq \times CX + YX$ *cub.* & pro $KE \times YX$ scriptis in primo termino $CX \times AK$, fiet $CX \times AKq - AK \times KB \times YX = CX \times YXq + YX$ *cub.* seu quod perinde est YX *cub.* $+ CX \times YXq + AK \times KB \times YX - CX \times AKq = 0$. Atque pro YX, CX, AK & KB substitutis valoribus supra assignatis x, p, $\sqrt{\frac{-r}{p}}$, $q\sqrt{\frac{p}{-r}}$ emerget tandem $x^3 + pxx + qx + r = 0$, æquatio construenda.

Solvuntur etiam hæ æquationes ducendo rectam lineam datæ longitudinis inter circulum & aliam rectam positione datos, ea lege ut recta illa ducta convergat ad punctum datum.

Proponatur enim æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, *cujus terminus secundus deest.*

TAB. IX. Fig. 7. Duc rectam KA ad arbitrium. Eam dic n. In KA utrinque producta cape $KB = \frac{q}{n}$, idque ad easdem partes puncti K cum linea KA si modo habeatur $-q$, aliter ad diversas. Bisseca BA in C, & centro A intervallo AC describe circulum CX. Ad hunc apta lineam rectam $CX = \frac{r}{nn}$, & per puncta K, C, & X describe circulum $KCXG$. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum secet circulum ultimo descriptum $KCXG$ in puncto G. Denique inter hunc ultimo descriptum circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC, ita ut ea convergat ad punctum G. Et acta recta EC erit una ex radicibus æquationis. Radices autem affirmativæ sunt quæ cadunt in majori circuli segmento KGC, & negativæ quæ in minori KFC si habeatur $-r$; & contra si habeatur $+r$ affirmativæ in minori segmento KFC, negativæ in majori KGC reperientur.

Ad hujus vero constructionis demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

LEM. I. *Positis quæ in constructione superiore, est* CE *ad* KA *ut* $CE + CX$ *ad* AY, *&* CX *ad* KY.

Nam

Nam recta KG ducta, est AC ad AK ut CX ad KG, idque ob similia triangula ACX, AKG. Sunt etiam triangula YEC, YKG similia: quippe quæ communem habent angulum ad Y, & angulos ad G & C in eodem circuli KCG segmento EGCK, atque adeo æquales. Inde fit CE ad EY ut KG ad KY, id est CE ad AC ut KG ad KY eo quod EY & AC juxta Hypothesin æquantur. Collata autem hacce cum superiore proportionalitate colligitur ex æquo perturbate quod sit CE ad KA ut CX ad KY, & vicissim CE ad CX ut KA ad KY. Unde componendo fit CE+CX ad CX ut KA+KY ad KY, id est ut AY ad KY, & vicissim CE+CX ad AY ut CX ad KY hoc est ut CE ad KA. Q. E. D.

Lem. II. *Demisso ad lineam GY perpendiculo CH, fiet rectangulum 2HEY æquale rectangulo CE×CX.*

Nam demisso etiam ad lineam AY perpendiculo GL, triangula KGL, ECH rectos habentia angulos ad L & H, & angulos ad K & E in eodem circuli CGK segmento CKEG, adeoque æquales, æquiangula sunt & proinde similia. Est ergo KG ad KL ut EC ad EH. Porro, à puncto A ad lineam KG demisso perpendiculo AM, ob æquales AK, AG bisecabitur KG in M, & triangula KAM, KGL ob angulum ad K communem, & angulos ad M & L rectos fient similia: & inde est AK ad KM ut KG ad KL. Sed ut est AK ad KM ita est 2AK ad 2KM seu KG, & ita (ob simila triangula AKG, ACX) est 2AC ad CX; & (ob æquales AC & EY) ita est 2EY ad CX. Ergo est 2EY ad CX ut KG ad KL. Sed erat KG ad KL ut EC ad EH, ergo est 2EY ad CX ut EC ad EH, atque adeo rectangulum 2HEY (ductis nimirum extremis & mediis in se) æquale est rectangulo EC×CX. Q. E. D.

Assumpsimus hic lineas AK, AG æquales esse. Nimirum rectangula CAK, XAG (per *Corol. Prop.* 36. *lib.* III. *Elem.*) æqualia sunt, atque adeo ut CA est ad XA ita AG est ad AK. Sed CA, XA æquales sunt per Hypothesin; ergo & AG, AK.

Lem. III. *Constructis omnibus ut supra, tres lineæ BY, CE, KA, sunt continue proportionales.*

Nam (per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.*) est $CYq = EYq + CEq$ +

$+2EY\times EH$. Et ablato utrinque EYq fit $CYq-EYq=CEq+2EY\times EH$. Sed $2EY\times EH$ (per *Lem.* 2.) æquale est rectangulo $CE\times CX$, & addito utrinque CEq fit $CEq+2EY\times EH=CEq+CE\times CX$. Ergo $CYq-EYq$ æquale est $CEq+CE\times CX$, id est $CY+EY$ in $CY-EY$ æquale est $CEq+CE\times CX$. Et resolutis æqualibus rectangulis in latera proportionalia fit $CE+CX$ ad $CY+EY$ ut $CY-EY$ ad CE. Sunt autem tres lineæ EY, CA, CB æquales, & inde $CY+EY=CY+CA=AY$, & $CY-EY=CY-CB=BY$. Scribantur itaque AY pro $CY+EY$, & BY pro $CY-EY$, & fiet $CE+CX$ ad AY ut BY ad CE. Sed (*per Lem.* 1.) est CE ad KA ut $CE+CX$ ad AY, ergo est CE ad KA ut BY ad CE, hoc est lineæ tres BY, CE, KA, sunt continue proportionales. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum constructio superioris Problematis sic *demonstratur*.

Per Lemma 1. est CE ad KA ut CX ad KY, adeoque $KA\times CX=KY\times CE$, & applicatis his æqualibus extremorum & mediorum rectangulis ad CE fit $\frac{KA\times CX}{CE}=KY$. His lateribus æqualibus adde BK & æqualia erunt $BK+\frac{KA\times CX}{CE}$ & BY. Unde per *Lemma tertium* est $BK+\frac{KA\times CX}{CE}$ ad CE ut CE ad KA, & inde, ductis extremis & mediis in se provenit CEq æquale $BK\times KA+\frac{KAq\times CX}{CE}$, & omnibus præterea ductis in CE fit CE *cub.* æquale $BK\times KA\times CE+KAq\times CX$. CE erat radix æquationis dicta x, KA erat n, $KB\ \frac{q}{n}$, & $CX\ \frac{r}{nn}$. His pro CE, KA, KB, & CX substitutis oritur $x^3=qx+r$, seu $x^3-qx-r=0$, æquatio construenda; ubi q & r negativa prodeunt sumptis KA & KB ad easdem partes puncti K, & radice affirmativa in majori segmento CGK existente. Hic *unus casus* est Constructionis demonstrandæ. Ducatur KB ad partes contrarias, id est, mutetur signum ejus seu signum ipsius $\frac{q}{n}$, vel quod perinde est, signum ter-

termini q, & habebitur constructio æquationis $x^3+qx-r=0$: *Qui casus est alter*. In his casibus CX, & radix affirmativa CE cadunt ad easdem partes lineæ AK. Cadant CX & radix negativa ad easdem mutato signo ipsius CX seu $\frac{r}{nn}$ vel (quod perinde est) signo ipsius r, & habebitur *casus tertius* $x^3+qx+r=0$, ubi radices omnes sunt negativæ. Et mutato rursus signo ipsius KB seu $\frac{q}{n}$ vel solius q, incidetur in *casum quartum* $x^3-qx+r=0$. Quorum omnium casuum constructiones percurrere licebit, & sigillatim demonstrare ad modum casus primi. Nos uno casu demonstrato cæteros leviter attingere satis esse putavimus. Hi verbis iisdem mutato solum linearum situ demonstrantur.

Construenda jam sit æquatio cubica $x^3+pxx*+r=0$, *cujus tertius terminus deest.*

In figura superiore assumpta longitudine quavis n, capias in recta quavis infinita AY, KA, & KB quarum KA valeat $\frac{r}{nn}$, & KB valeat p. Has cape ad easdem partes puncti K, si modo signa terminorum p & r sint eadem, secus ad contrarias. Biseca BA iu C, & centro A intervallo AC describe circulum CX. In eo aptes rectam CX, æqualem longitudini assumptæ n. Junge AX & produc junctam ad G ita ut fiat AG æqualis AK, & per puncta K, C, X, G, describe circulum. Denique inter hunc circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC ea lege ut hæc inscripta recta transeat per punctum G si modo ipsa producatur: & acta recta KY erit una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ cadunt ad partes puncti K versus punctum A si modo habeatur $+r$; sin habeatur $-r$, affirmativæ sunt quæ cadunt ad partes contrarias. Et si affirmativæ radices jacent ex una parte puncti A, negativæ sunt quæ jacent ex altera.

Demonstratur autem hæc constructio ope Lemmatum trium novissimorum in hunc modum.

Per *Lemma tertium* sunt BY, CE, KA continue proportionales; & per *Lemma primum* ut est CE ad KA ita est CX ad KY.

Ergo BY est ad CE ut CX ad KY. BY idem est quod KY — KB. Ergo KY — KB est ad CE ut CX ad KY. Sed ut est KY — KB ad CE ita est KY — KB in KY ad CE in KY, idque per *Prop.* 1. *lib.* VI. *Elem.* & ob proportionales CE ad KA ut CX ad KY est CE in KY æquale KA in CX. Ergo KY — KB in KY est ad KA in CX (ut KY — KB ad CE, hoc est) ut CX ad KY. Et ductis extremis & mediis in se invicem fit KY — KB in KYq æquale KA in CXq: id est KY *cub.* — KB × KY *quad.* æquale KA × CX *quad.* Erat autem in constructione, KY radix æquationis dicta x, KB æqualis p, KA æqualis $\frac{r}{nn}$, & CX æqualis n. Scribantur igitur x, p, $\frac{r}{nn}$, & n pro KY, KB, KA, & CX respective, & fiet $x^3 - pxx = r$, seu $x^3 - pxx - r = 0$.

Resolvi potest constructio demonstranda in hasce quatuor æquationum casus, $x^3 - pxx - r = 0$, $x^3 - pxx + r = 0$, $x^3 + pxx - r = 0$, & $x^3 + pxx + r = 0$. Casum primum jam demonstratum dedi, cæteri tres iisdem verbis mutato tantum linearum situ demonstrantur. Nimirum uti sumendo KA & KB ad easdem partes puncti K, & radicem affirmativam KY ad contrarias partes, jam prodiit KY *cub.* — KB × KYq = KA × CXq, & inde $x^3 - pxx - r = 0$: sic sumendo KB ad contrarias partes puncti K, prodibit simili argumentationis progressu KY *cub.* + KB × KYq = KA × CXq, & inde $x^3 + pxx - r = 0$. Et in hisce duobus casibus si mutetur situs radicis affirmativæ KY sumendo eam ad alteram partem puncti K, per similem argumentationis seriem devenietur ad alteros duos casus KY *cub.* + KB × KYq = — KA × CXq, seu $x^3 + pxx + r = 0$, & KY *cub.* — KB × KYq = — KA × CXq, seu $x^3 - pxx + r = 0$. Qui omnes casus erant demonstrandi.

Proponatur jam æquatio cubica $x^3 + pxx + qx + r = 0$, *nullo* (*nisi forte tertio*) *termino carens.* Ea construetur ad hunc modum.

Tab. IX. Fig. 8. Cape ad arbitrium longitudinem n. Ejus dimidio æqualem duc rectam quamvis GC, & ad punctum G erige perpendiculum GD æquale $\sqrt{\frac{r}{p}}$. Deinde si termini p & r habent contraria signa, cen-

tro C intervallo CD defcribe circulum PBE. Sin eadem funt eorum figna, centro D intervallo GC defcribe circulum occultum fecantem rectam GA in H; dein centro C intervallo GH defcribe circulum PBE. Tum fac $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, eamque duc in lineа GC ad partes puncti G verfus C fi modo quantitas $-\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$ (fignis terminorum p, q, r, in æquatione conftruenda probe obfervatis) affirmativa obvenerit: fecus age GA ad alteras partes puncti G, & ad punctum A erecto perpendiculo AY, inter hoc & circulum PBE fuperius defcriptum infcribe lineam EY æqualem termino p, ea lege ut hæc infcripta convergat ad punctum G. Quo facto & producta illa EY ad G, erit linea EG una ex radicibus æquationis conftruendæ. Quæ quidem radices affirmativæ funt ubi punctum E cadit inter puncta G & Y, & negativæ ubi E cadit extra, fi modo habeatur $+p$; & contra fi $-p$. TAB. X. Fig. 1.

Demonftrationi hujus conftructionis præmittimus *Lemmata* fequentia.

LEM. I. *Demiffo ad AG perpendiculo EF & acta recta EC, eft* $EGq + GCq = ECq + 2CGF$.

Nam per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem* eft $EGq = ECq + GCq + 2GCF$. Addatur utrinque GCq & fiet $EGq + GCq = ECq + 2GCq + 2GCF$. Sed $2GCq + 2GCF$ eft $2GC$ in $GC + CF$ id eft $2CGF$. Ergo $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Q. E. D.

LEM. II. *In conftructionis cafu primo ubi circulus PBE tranfit per punctum D, eft* $EGq - GDq = 2CGF$. TAB. IX. Fig. 8.

Nam per *Lemma primum* eft $EGq + GCq = ECq + 2CGF$, & ablato utrinque GCq, fit $EGq = ECq - GCq + 2CGF$. Sed $ECq - GCq$ idem eft quod $CDq - GCq$, hoc eft idem quod GDq. Ergo $EGq = GDq + 2CGF$, & fubducto utrobique GDq, fit $EGq - GDq = 2CGF$. Q.E.D.

LEM. III. *In conftructionis cafu fecundo, ubi circulus PBE non tranfit per punctum D, eft* $EGq + GDq = 2CGF$. TAB. X. Fig. 1.

Namque in *Lemmate primo* erat $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Aufer utrinque ECq & fiet $EGq + GCq - ECq = 2CGF$. Sed GC

GC=DH & EC=CP=GH: ergo $GCq - ECq = DHq - GHq = GDq$, atque adeo $EGq + GDq = 2CGF$. Q.E.D.

Lem. IV. *Est* $2CGF$ *in* $GY = 2CG$ *in* AGE.

Namque ob similia triangula GEF, GYA est GF ad GE ut AG ad GY; hoc est (per *Prop.* I. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2CG \times AG$ ad $2CG \times GY$. Ducantur extrema & media in se, & fiet $2CG \times GY \times GF = 2CG \times AG \times GE$. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum constructio Problematis sic demonstratur.

Tab. IX. Fig. 8. In casu *primo* est (per *Lem.* 2.) $EGq - GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY - GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc est per *Lem.* 4.) $= 2CG \times AGE$. Pro GY scribe EG+EY, & fiet $EG\,cub. + EY \times EGq - GDq \times EG - GDq \times EY = 2CGA \times EG$, seu $EG\,cub. + EY \times EGq \begin{matrix} - GDq \\ - 2CGA \end{matrix} \times EG - GDq \times EY = 0$.

Tab. X. Fig. 1. In casu *secundo* est (per *Lem.* 3.) $EGq + GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY + GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc est per *Lem.* 4.) $= 2CG \times AGE$. Pro GY scribe EG+EY, & fiet $EG\,cub. + EY \times EGq + GDq \times EG + GDq \times EY = 2CGA \times EG$, seu $EG\,cub. + EY \times EGq \begin{matrix} + GDq \\ - 2CGA \end{matrix} \times EG + GDq \times EY = 0$.

Jam vero erat EG radix æquationis constructæ dicta x; item $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2CG = n$, & $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, id est in casu primo ubi terminorum p & r diversa sunt signa: at in casu secundo ubi alterutrius p vel r mutatur signum fiet $-\frac{q}{n} + \frac{r}{np} = GA$. Scribantur igitur pro EG, GD, EY, 2CG, & GA quantitates x, $\sqrt{\frac{r}{p}}$, p, n, & $-\frac{q}{n} \mp \frac{r}{np}$, & casu *primo* fiet $x^3 + px^2 \begin{matrix} -\frac{r}{p} \\ +q+\frac{r}{p} \end{matrix} x - r = 0$, id est $x^3 + pxx + qx - r = 0$, casu autem *secundo* $x^3 + px^2 \begin{matrix} +\frac{r}{p} \\ +q-\frac{r}{p} \end{matrix} x + r = 0$, id est $x^3 + pxx + qx + r = 0$. Est igi-

igitur in utroque casu EG vera longitudo radicis x. Q. E. D.

Subdistinguitur autem casus uterque in casus plures particulares: Nimirum prior in hosce $x^3+px^2+qx-r=0$, $x^3+pxx-qx-r=0$, $x^3-pxx+qx+r=0$, $x^3-pxx-qx+r=0$, $x^3+px^2-r=0$, & $x^3-pxx+r=0$; posterior in hosce $x^3+pxx+qx+r=0$, $x^3+pxx-qx+r=0$, $x^3-pxx+qx-r=0$, $x^3-pxx-qx-r=0$, $x^3+pxx+r=0$, & $x^3-pxx-r=0$. Quorum omnium demonstrationes verbis iisdem ac duorum jam demonstratorum, mutato tantum linearum situ, compinguntur.

Hæ sunt Problematum constructiones præcipuæ per inscriptionem rectæ longitudine datæ inter circulum, & rectam lineam positione datam ea lege ut inscripta ad datum punctum convergat. Inscribitur autem talis recta ducendo *Conchoidem* veterum, cujus Polus sit punctum illud ad quod recta inscribenda debet convergere, Regula seu Asymptotos recta altera positione data, & intervallum longitudo rectæ inscribendæ. Secabit enim hæc Conchoides circulum præfatum in puncto E per quod recta inscribenda duci debet. Suffecerit vero in rebus practicis rectam illam inter circulum & alteram positione datam rectam ratione quacunque mechanica interponere.

In hisce autem constructionibus notandum est quod quantias n, ubique indeterminata & ad arbitrium assumenda relinquitur, id adeo ut singulis problematis constructiones commodius aptentur. Hujus rei exempla in inventione duarum medie proportionalium, & anguli trisectione dabimus.

Inveniendæ sint inter a *& b duæ medie proportionales* x & y. Quoniam sunt $a.x.y.b$ continue proportionales erit aa ad xx ut x ad b, adeoque $x^3=aab$, seu $x^3-aab=0$. Hic desunt æquationis termini p & q, & loco termini r habetur $-aab$. Igitur in constructionum formula prima, ubi recta EY ad datum punctum K convergens inscritur inter alias duas positione datas rectas EX & YC, Tab. X. Fig. 2.
& recta CX ponitur æqualis $\frac{\cdot r}{nn}$ id est æqualis $\frac{-aab}{nn}$, assumo n æqualem a, & sic fit CX æqualis $-b$. Unde talis emergit constructio.

Duco quamvis KA æqualem a, eamque bisceo in C, centroque

K

K intervallo KC describo circulum CX ad quem apto rectam CX æqualem b & inter rectas AX, CX infinite productas pono EY æqualem CA, & convergentem ad punctum K. Sic erunt KA, XY, KE, CX, continue proportionales, id est XY & KE duæ mediæ proportionales inter a & b. Constructio nota est.

Tab. IX. Fig. 7. In altera autem constructionum formula ubi recta EY ad datum punctum G convergens ponitur inter circulum GECX & rectam AK, estque $CX = \frac{r}{nn}$ id est (in hoc Problemate) $= \frac{-aab}{nn}$, pono ut prius $n = a$, & sic fit $CX = b$, cæteraque peraguntur ut sequitur.

Tab. X. Fig. 3. Duco rectam quamvis KA æqualem a, eamque biseco in C & centro A intervallo AK describo circulum KG ad quem apto rectam KG æqualem $2b$ constituendo triangulum æquicrurum AKG. Dein per puncta C, K, G circulum describo & inter hujus perimetrum & rectam productam AK inscribo rectam EY æqualem KC, & convergentem ad punctum G. Quo facto continue proportionales erunt AK, EC, KY, $\frac{1}{2}$KG, id est EC & KY duæ mediæ proportionales erunt inter datas a & b.

Tab. X. Fig. 4. *Secandus jam sit angulus in partes tres æquales. Sitque angulus secandus ACB, partes ejus inveniendæ ACD, DCE, ECB.*

Centro C intervallo CA describatur circulus ADEB secans rectas CA, CD, CE, CB in A, D, E, B. Jungantur AD, DE, EB ut & AB secans rectas CD, CE in F & H, & ipsi CE parallela agatur DG occurrens AB in G. Ob similia triangula CAD, ADF, DFG, continue proportionales sunt CA, AD, DF, FG. Ergo si dicatur $AC = a$, & $AD = x$, fiet $DF = \frac{xx}{a}$, & $FG = \frac{x^3}{aa}$. Est autem $AB = BH + HG + FA - GF = 3AD - GF = 3x - \frac{x^3}{aa}$. Dic $AB = b$, & fiet $b = 3x - \frac{x^3}{aa}$, seu $x^3 - 3aax + aab = 0$. Hic deest æquationis terminus secundus p, & loco q & r habentur $-3aa$ & aab. Ergo in constructionum formula prima ubi erat $p = 0$, $KA = n$, $KB = \frac{q}{n}$, & $CX = \frac{r}{nn}$, id est in pro-

problemate jam construendo $KB = -\frac{3aa}{n}$, & $CX = \frac{aab}{nn}$, ut hæ quantitates evadant quam simplicissimæ pono $n = a$, & sic fit $KB = -3a$, & $CX = b$. Unde talis emergit Problematis *constructio*.

Ago quamvis $KA = a$, & ad contrarias partes $KB = 3a$. Biseco BA in C, centroque K intervallo KC describo circulum, cui inscribo rectam $CX = b$. Et acta recta AX, inter ipsam infinite productam & rectam CX pono rectam EY æqualem AC, & convergentem ad punctum K. Sic fit $XY = x$. Quinetiam ob æquales circulos ADEB, CXA, & æquales subtensas AB, CX, nec non æquales subtensarum partes BH, XY, æquales erunt anguli ACB, CKX, ut & anguli BCH, XKY, atque adeo anguli CKX tertia pars erit angulus XKY. Dati igitur cujusvis anguli CKX pars tertia XKY invenietur ponendo inter chordas CX, AX infinite productas rectam EY æqualem diametro AC, & convergentem ad circuli centrum K. TAB. X. Fig. 5.

Hinc si à circuli centro K ad subtensam CX demittas perpendiculum KH, erit angulus HKY tertia pars anguli HKX, adeo ut si detur quilibet angulus HKX inveniri possit ejus pars tertia HKY demittendo à quolibet lateris utriusvis KX puncto X ad latus alterum KH perpendiculum XH, & lateri KH ducendo parallelam XE, dein rectam YE duplam ipsius KX, & convergentem ad punctum K ponendo inter rectas XH & XE. *Vel sic*. Detur angulus quilibet AXK. Ad latus alterutrum AX erigatur perpendiculum XH, & à lateris alterius XK puncto quovis K agatur recta KE cujus pars YE interjacens lateri AX producto, & ejus perpendiculo XH sit dupla lateris XK, & erit angulus KEA tertia pars anguli dati AXK. Tum rursus erecto perpendiculo EZ, & acta KF cujus pars ZF inter EF & EZ sit dupla ipsius KE, fiet angulus KFA tertia pars anguli KEA, & sic pergitur per continuam anguli trisectionem in infinitum. Exstat autem hæc trisectio apud *Pappum*, *lib*. 4. *Prop*. 32. TAB. X. Fig. 6.

Quod si angulum per alteram constructionum formulam ubi recta inter aliam rectam & circulum ponenda est, trifariam dividere malueris:

Hic

TAB. IX. Fig. 7. Hic etiam erunt $KB=\frac{q}{n}$, & $CX=\frac{r}{nn}$, id est in problemate de quo nunc agimus $KB=\frac{-3aa}{n}$, & $CX=\frac{aab}{nn}$, adeoque ponendo $n=a$ fiet $KB=-3a$, & $CX=b$. Et inde talis emerget *constructio.*

TAB. X. Fig. 7. A puncto quovis K ducantur ad easdem partes rectæ duæ $KA=a$, & $KB=3a$. Biseca AB in C, centroque A intervallo AC describe circulum. In eo pone rectam $CX=b$. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum secet circulum jam descriptum in G. Tum inter hunc circulum & rectam KC infinite productam pone rectam EY æqualem rectæ AC, & convergentem ad punctum G, & acta recta EC erit longitudo quæsita x, qua tertia pars anguli dati subtenditur.

Talis constructio consequitur formulam superius allatam: quæ tamen sic evadet concinnior. Ob æquales circulos ADEB & KXG, & æquales subtensas CX & AB, æquales sunt anguli CAX sive KAG & ACB, adeoque CE subtensa est tertiæ partis anguli KAG. Quare dato quovis angulo KAG, ut ejus inveniatur pars tertia CAE, pone inter circulum KGC, & anguli latus KA infinite productum rectam EY æqualem circuli semidiametro AG, & convergentem ad punctum G. Sic docuit *Archimedes* angulum trifariam secare. (*Lemma Archim* 8.) Eædem constructiones facilius explicari possent quam hic factum est; sed in his volui ostendere quomodo ex generalibus Problematum constructionibus superius expositis constructiones simplicissimas particularium Problematum derivare liceat.

TAB. X. Fig. 8. Præter constructiones hic expositas adjungere liceret quamplurimas. *Ut si inter a & b inveniendæ essent duæ mediæ proportionales.* Age quamvis $AK=b$, & huic perpendiculare $AB=a$. Biseca AK in I, & in eadem AK, subtensæ BI æqualem pone AH; ut & in linea AB producta subtensæ BH æqualem AC. Tum in linea AK ad alteras partes puncti A cape AD cujusvis longitudinis, & huic æqualem DE, centrisque D & F, intervallis DB, EC describe circulos duos BF, CG, & inter eos pone rectam FG æqualem rectæ AI, & convergentem ad punctum A, & erit AF pri-

ma

ma duarum medie proportionalium quas invenire oportuit.

Docuerunt Veteres inventionem duarum medie proportionalium per *Cissoidem*; sed lineæ hujus descriptionem commodam manualem nemo, quod scio, apposuit. Sit AG diameter & F centrum circuli ad quem *Cissois* pertinet. Ad punctum F erigatur normalis FD, eaque producatur in infinitum. Et producatur FG ad P, ut FP æqualis sit circuli Diametro. Moveatur norma rectangula PED ea lege ut crus ejus EP perpetuo transeat per punctum P, & crus alterum ED circuli Diametro AG seu FP æquale, termino suo D tangat semper lineam FD, & cruris hujus medium punctum C describet *Cissoidem* desideratam GCK ut supra exposui. Quare si inter duas quasvis a & b inveniendæ sint duæ mediæ proportionales: Cape AM $= a$, erige perpendiculum $MN = b$. Junge AN; & lege præfata moveatur norma PED, usque dum punctum ejus C incidat in rectam AN. Tum demisso ad AP perpendiculo CB, cape t ad BH, & v ad BG, ut est MN ad BC; & ob continue proportionales AB, BH, BG, BC erunt etiam continue proportionales a, t, v, b. TAB. X. Fig. 9. pag. 130.

Simili normæ applicatione construi possunt etiam alia Problemata solida. Verbi gratia proponatur æquatio cubica $x^3 \pm pxx + qx - r = 0$: ubi q semper affirmativum sit, r negativum, & p signi utriusvis.

Fac $AG = \frac{r}{q}$, eamque bisseca in F, & cape FR & $GL = \frac{1}{2}p$, idque versus A si habeatur $+p$ aliter versus P. Erige insuper normalem FD, inque ea cape $FQ = \sqrt{q}$ huic etiam erige normalem QC. In normæ autem crure ED, cape ED & EC ipsis AG & AR æquales respective, & applicetur deinceps norma ad Schema sic ut punctum ejus D tangat rectam FD, & punctum C rectam QC, tum si compleatur parallelogrammum BQ; erit LB æquationis radix quæsita x.

Hactenus constructionem solidorum Problematum per operationes quarum praxis manualis maxime simplex est & expedita exponere visum fuit. Sic Veteres postquam confectionem horum problematum per compositionem locorum solidorum assecuti fuerant, sentientes ejusmodi constructiones ob difficilem Conicarum sectionum descrip-

tionem inutiles esse, quærebant constructiones faciliores per Conchoidem, Cissoidem, extensionem filorum & figurarum adaptiones quascunque mechanicas: prælata mechanica utilitate inutili speculationi Geometricæ, ut ex *Pappo* discimus, Sic magnus ille *Archimedes* trisectionem anguli per coni sectiones à superioribus Geometris expositam neglexit, & in Lemmatis suis angulum modo à nobis superius exposito trifariam secare docuit. Si veteres problemata per figuras ea tempestate in Geometriam non receptas construere maluerint, quanto magis præferendæ nunc sunt illæ figuræ, in Geometriam æque ac ipsæ coni sectiones à plerisque receptæ.

Verum tamen novo huic Geometrarum generi haud assentior, qui figuras hasce omnes in Geometriam recipiunt. Eorum regula admittendi lineas omnes ad constructionem Problematum eo ordine quo æquationes quibus lineæ illæ definiuntur, numero dimensionum ascendunt, arbitraria est, & in Geometria fundamentum non habet. Imo falsa est, propterea quod circulus hac lege cum Coni sectionibus conjungendus esset quem tamen Geometræ omnes cum linea recta conjungunt. Vacillante autem hac regula tollitur fundamentum admittendi certo ordine lineas omnes Analyticas in Geometriam. In Geometriam planam meo quidem judicio lineæ nullæ præter rectam & circulum admitti debent, nisi forte linearum distinctio aliqua prius excogitetur qua linea circularis conjungatur cum recta, & à reliquis omnibus segregetur. Quinimo ne tum quidem augenda est Geometria plana numero linearum, Nam figuræ omnes sunt planæ quæ admittuntur in Geometriam planam, id est quas Geometræ postulent in plano describere, Et problema omne planum est quod per figuras planas construi potest. Sic igitur admissis in Geometriam planam conicis sectionibus, aliisque magis compositis figuris, problemata omnia solida & plus quam solida quæ per has figuras construi possunt evadent plana. Sunt autem problemata omnia plana ejusdem ordinis. Linea recta Analytice simplicior est quam circulus; hoc non obstante problemata ejusdem sunt ordinis quæ per rectas solas, & quæ per circulos construuntur. Solis postulatis reducitur circulus ad eundem ordinem cum recta. Et multo magis Ellipsis quæ minus differt à circulo quam circulus à recta, postulando consimiliter de-

descriptionem ejus in plano, reduceretur ad eundem ordinem cum circulo. Siquis speculando Ellipsin incideret in problema aliquod solidum, & ipsum beneficio ejusdem Ellipseos & circuli construeret: hoc problema jam pro plano habendum esset, eo, quod Ellipsis jam ante in plano descripta haberi supponitur, & constructio omnis quæ superest absolvitur per circuli solius descriptionem. Eadem de causa problemata quævis plana per datam Ellipsin construere licitum est. Verbi gratia si datæ Ellipseos ADFG requireretur centrum O, ducerem parallelas duas AB, CD Ellipsi occurrentes in A, B, C, D, aliasque duas EF, GH Ellipsi occurrentes in E, F, G, H. Has bisecarem in I, K, L, M, & junctas IK, LM producerem usque ad concursum suum in O. Legitima est hæc constructio plani problematis per Ellipsin. Nil refert quod Ellipsis Analytice definiatur per æquationem duarum dimensionum. Nil quod Ellipsis Geometrice generetur sectione figuræ solidæ. Hypothesis sola, quod Ellipsis jam descripta habetur in plano, problemata omnia solida per ipsam constructa reducit ad ordinem planorum, efficitque ut plana omnia per ipsam legitime construantur. Et eadem est ratio Postulati. Quod vi postulatorum fieri potest, ut jam factum, & datum assumere concessum est. Postuletur igitur Ellipsin in plano describere, & ad ordinem planorum problematum reducentur ea omnia quæ per Ellipsin construi possunt, planaque omnia per Ellipsin licebit construere. TAB. XI. Fig. 1.

Necesse est igitur aut Problemata plana & solida inter se confundi, aut lineas omnes rejici è Geometria plana præter rectam & circulum, & siqua forsan alia detur aliquando in statu construendi alicujus Problematis. Verum genera problematum confundi nemo certe permiserit. Rejiciantur igitur è Geometria plana sectiones Conicæ, aliæque figuræ omnes præter rectam & circulum, & quas contigerit in statu problematum dari. Alienæ sunt igitur à Geometria descriptiones illæ omnes conicarum sectionum in plano quibus hodierni Geometræ tantopere indulgent. Nec tamen ideo Coni sectiones è Geometria rejiciendæ erunt. Hæ in plano non describuntur Geometrice, generantur vero in solidi Geometrici superficie plana. Conus constituitur Geometrice, & plano Geometrico secatur. Tale Coni segmentum figura Geometrica est, eundemque habet

habet locum in Geometria solida ac segmentum circuli in plana, & hac ratione basis ejus, quam Coni sectionem vocant, figura Geometrica est. Locum igitur habet Coni sectio in Geometria quatenus ea superficies est solidi Geometrici. Alia autem nulla ratione Geometrica quam solidi sectione generatur, & ideo non nisi in Geometriam solidam antiquitus admissa fuit. Talis autem Conicarum sectionum generatio difficilis est, & in rebus practicis, quibus Geometria potissimum inservire debet, prorsus inutilis. Ideo veteres se ad varias figurarum in plano descriptiones mechanicas receperunt, & nos ad eorum exemplar constructiones præcedentes concinnavimus. Sunto constructiones illæ Mechanicæ: sic & constructiones per Coni sectiones in plano (ut jam moris est) descriptas Mechanicæ sunt. Sunto constructiones per datas Coni sectiones Geometricæ: sic & constructiones per alias quascunque figuras datas Geometricæ sunt, & ejusdem ordinis cum constructionibus planorum Problematum. Nulla ratione præferendæ sunt in Geometria Sectiones conicæ figuris aliis, nisi quatenus illæ à sectione Coni, praxi ad solutionem problematum prorsus inutili, derivantur. Verum tamen ne constructiones per Conicas sectiones omnino prætercam, visum fuit aliqua de his subjungere, in quibus etiam praxi manuali non incommodæ consulatur.

Conicarum sectionum simplicissima est Ellipsis. Hæc notior est, & circulo magis affinis, & praxi manuali facilius describitur in plano. Parabolam præferunt plerique ob simplicitatem æquationis per quam ea exprimitur. Verum hac ratione Parabola ipso etiam circulo præferenda esset, contra quam fit. Falsa est igitur argumentatio à simplicitate æquationum. Æquationum speculationi nimium indulgent hodierni Geometræ. Harum simplicitas est considerationis Analyticæ. Nos in compositione versamur, & compositioni leges dandæ non sunt ex Analysi. Manuducit Analysis ad Compositionem: sed Compositio non prius vere confit quam liberatur ab omni Analysi. Insit compositioni vel minimum Analyseos, & compositionem veram nondum assecutus es. Compositio in se perfecta est & à mixtura speculationum Analyticarum abhorret. Pendet Figurarum simplicitas à simplicitate geneseos & Idearum, & æquatio non est sed de-

descriptio (sive Geometrica sive Mechanica) qua figura generatur & redditur conceptu facilis. Ellipsi igitur primum locum tribuentes, docebimus jam quomodo æquationes per ipsam construere licet.

Proponatur æquatio quævis cubica $x^3 = pxx + qx + r$, *ubi* p, q *&* r *datas terminorum æquationis coefficientes cum signis suis* + & — *significant, & alteruter terminorum* p *&* q, *vel etiam uterque deesse potest.* Sic enim æquationum omnium cubicarum constructiones una illa operatione quæ sequitur exhibebimus.

A puncto B in recta quavis data cape duas quascunque rectas BC, BE ad easdem partes; ut & inter ipsas mediam proportionalem BD. Et BC dicta n, cape etiam in eadem recta $BA = \frac{q}{n}$, idque versus punctum C si habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem p, FG æqualem AF, FI æqualem $\frac{r}{nn}$, & FH in ratione ad FI ut est BC ad BE. FH vero & FI capiendæ sunt ad partes puncti F versus G si termini p & r habent eadem signa, aliter ad partes versus A. Compleantur parallelogramma IACK & HAEL, centroque K, & intervallo KG describatur circulus. Tum in linea HL capiatur ad utramvis partem puncti H longitudo HR, quæ sit ad HL ut BD ad BE: Agatur GR secans EL in S, & moveatur linea GRS puncto ejus R super linea HL, & puncto S super linea EL incedente, donec tertium ejus punctum G describendo Ellipsin, occurrat circulo, quemadmodum videre est in positione $\gamma\varrho\sigma$. Nam dimidium perpendiculi γX ab occursus illius puncto γ in rectam AE demissi erit radix æquationis. Potest autem Regulæ GRS vel $\gamma\varrho\sigma$ terminus G vel γ, circulo in tot punctis occurrere quot sunt possibiles radices. Et è radicibus hæ sunt affirmativæ quæ cadunt ad eas partes rectæ AE ad quas recta FI ducitur à puncto F, & illæ negativæ quæ cadunt ad contrarias partes lineæ AE, si modo habeatur $+r$: & contra si habeatur $-r$. Tab. XI. Fig. 2.

Demonstratur autem hæc constructio subsidio *Lemmatum* sequentium.

Lem. I. *Positis quæ in superiore constructione, est* $2CAX - AXq = \gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$.

 Nam-

Namque ex natura circuli est $K\gamma q - CXq$, æquale quadrato ex $\gamma X - AI$. Sed est $K\gamma q$ æquale $GIq + ACq$, & CXq æquale quadrato ex $AX - AC$ hoc est æquale $AXq - 2CAX + ACq$, atque adeo horum differentia $GIq + 2CAX - AXq$, æquatur quadrato ex $\gamma X - AI$, id est ipsi $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq$. Auferatur utrinque GIq, & manebunt æqualia $2CAX - AXq$, & $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq - GIq$. Verum AIq (per *Prop.* 4. *lib.* II. *Elem.*) æquale est $AGq + 2AGI + GIq$, atque adeo $AIq - GIq$ æquale est $AGq + 2AGI$, hoc est æquale $2AG$ in $AG + GI$, seu æquale $2AG \times FI$, & proinde $2CAX - AXq$, æquale est $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$. Q. E. D.

LEM. II. *Positis quæ in superiore constructione, est* $2EAX - AXq$ *æquale* $\frac{FI}{FH}X\gamma q - \frac{2FI}{FH}AH \times X\gamma + 2AG \times FI$.

Notum est enim quod punctum γ motu regulæ $\gamma\varrho\sigma$ superius assignato describit Ellipsin cujus centrum est L, & axes duo cum rectis LE & LH coincidunt, quorum qui in LE æquatur $2\gamma\varrho$ sive $2GR$, & alter in LH æquatur $2\gamma\sigma$ sive $2GS$. Et horum ratio ad invicem ea est quæ lineæ HR ad lineam HL, sive lineæ BD ad lineam BE. Unde latus transversum est ad latus rectum principale ut BE ad BC sive ut FI ad FH. Quare cum γT ordinatim applicetur ad HL, erit ex natura Ellipseos $GSq - LTq$ æquale $\frac{FI}{FH}T\gamma q$. Est autem LT æquale $AE - AX$, & $T\gamma$ æquale $X\gamma - AH$. Scribantur horum quadrata pro LTq & $T\gamma q$, & fiet $GSq - AEq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Est autem $GSq - AEq$ æquale quadrato ex $GH + LS$, propterea quod GS hypotenusa est trianguli rectanguli cujus latera sunt ipsis AE & $GH + LS$ æqualia. Est & (ob similia triangula RGH, RSL) LS ad GH ut LR ad HR, & componendo $GH + LS$ ad GH ut HL ad HR, & duplicando rationes, quadratum ex $GH + LS$, est ad GHq ut HLq ad HRq, hoc est (per constructionem) ut BEq ad BDq, id est ut BE ad BC, seu FI ad FH, adeoque quadratum ex $GH + LS$ æquale est

FI

$\frac{FI}{FH}GHq$. Est itaque $GSq - AEq$ æquale $\frac{FI}{FH}GHq$, atque adeo $\frac{FI}{FH}GHq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Auferatur utrinque $\frac{FI}{FH}GHq$, & restabit $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq - GHq$. Est autem $AH = AG + GH$, adeoque $AHq. = AGq + 2AGH + GHq$ & subducto utrinque GHq restat $AHq - GHq = AGq + 2AGH$, hoc est $= 2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GH$, seu $= 2AG \times FH$, atque adeo est $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + 2AG \times FH$, i. e. $= \frac{FI}{FH}X\gamma q - \frac{2FI}{FH}AH \times X\gamma + 2AG \times FI$. Q. E. D.

LEM. III. *Iisdem positis est AX ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad $2BC$.*

Nam si de æqualibus in *Lemmate secundo* subducantur æqualia in *Lemmate primo*, restabunt æqualia $2CE \times AX$ & $\frac{HI}{FH}X\gamma q - \frac{2FI}{FH}AH \times X\gamma + 2AI \times X\gamma$. Ducatur pars utraque in FH, & fiet $2FH \times CE \times AX$ æquale $HI \times X\gamma q - 2FI \times AH \times X\gamma + 2AI \times FH \times X\gamma$. Est autem $AI = AH + HI$, adeoque $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2FI \times AH - 2FHA - 2FHI$. Sed $2FI \times AH - 2FHA = 2AHI$, & $2AHI - 2FHI = 2HI \times AF$. Ergo $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2HI \times AF$, adeoque $2FH \times CE \times AX = HI \times X\gamma q - 2HI \times AF \times X\gamma$. Et inde HI ad FH ut $2CE \times AX$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$. Sed per constructionem HI est ad FH ut CE ad BC, atque adeo ut $2CE \times AX$ ad $2BC \times AX$, & proinde $2BC \times AX$ & $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$ (per *Prop. 9. lib.* V. *Elem.*) erunt æqualia. Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera, AX ad $X\gamma - 2AF$, id est ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad $2BC$. Q. E. D.

LEM. IV. *Iisdem positis, est $2FI$ ad $AX - 2AB$ ut $X\gamma$ ad $2BC$.*

Nam de æqualibus in Lemmate tertio, nimirum $2BC \times AX =$

$=X\gamma q - 2AF\times X\gamma$, subducantur æqualia in *Lemmate primo*, & restabunt æqualia $-2AB\times AX + AXq = 2FI\times X\gamma - 2AG\times FI$, hoc est AX in $AX - 2AB = 2FI$ in $X\gamma - AG$. Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera $2FI$ ad $AX - 2AB$ ut AX ad $X\gamma - AG$, hoc est (per *Lemma tertium*) ut $X\gamma$ ad $2BC$. Q. E. D.

Præstratis his Lemmatibus, Constructio Problematis sic tandem demonstratur.

Per *Lemma quartum* est $X\gamma$ ad $2BC$ ut $2FI$ ad $AX - 2AB$, hoc est (per *Prop.* 1. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2BC\times 2FI$ ad $2BC\times\overline{AX - 2AB}$, seu ad $2BC\times AX - 2BC\times 2AB$. Sed per *Lemma tertium* est AX ad $X\gamma - 2AF$ ut $X\gamma$ ad $2BC$, seu $2BC\times AX = X\gamma q - 2AF\times X\gamma$, adeoque $X\gamma$ est ad $2BC$ ut $2BC\times 2FI$ ad $X\gamma q - 2AF\times X\gamma - 2BC\times 2AB$. Et ductis extremis & mediis in se, fit $X\gamma$ *cub.* $-2AF\times X\gamma q - 4BC\times AB\times X\gamma = 8BCq\times FI$. Addantur utrinque $2AF\times X\gamma q + 4BC\times AB\times X\gamma$, & fiet $X\gamma$ *cub.* $= 2AF\times X\gamma q + 4BC\times AB\times X\gamma + 8BCq\times FI$. Erat autem in constructione demonstranda, $\frac{1}{2}X\gamma$ radix æquationis dicta x, nec non $AF = p$, $BC = n$, $AB = \frac{q}{n}$, & $FI = \frac{r}{nn}$, adeoque $BC\times AB = q$. Et $BCq\times FI = r$. Quibus substitutis fict $x^3 = px^2 + qx + r$. Q. E. D.

Corol. Hinc si AF & AB ponantur nulla, per *Lemma* tertium & quartum fiet $2FI$ ad AX ut AX ad $X\gamma$ & $X\gamma$ ad $2BC$. Unde constat inventio duarum mediæ proportionalium inter datas quaslibet FI & BC.

Scholium. Hactenus æquationis cubicæ constructionem per Ellipsin solummodo exposui: sed regula sua natura generalior est, sese ad omnes coni sectiones indifferenter extendens. Nam si loco Ellipseos velis Hyperbolam adhiberi, cape lineas BC, BE ad contrarias partes puncti B, dein puncta A, F, G, I, H, K, L & R determinentur ut ante, excepto tantum quod FH debet sumi ad partes ipsius F contra I, & quod HR non in linea HL, sed in linea AI ad utramque partem puncti H capi debet, & vice rectæ GRS duæ aliæ rectæ à puncto L ad puncta duo R & R hinc inde duci pro asymptotis Hyperbolæ. Cum istis itaque asymptotis LR, LR de-

describe Hyperbolam per punctum G, ut & circulum centro K intervallo KG: & dimidia perpendiculorum ab eorum intersectionibus ad rectam AE demissorum erunt radices æquationis propositæ. Quæ omnia, signis + & — probe mutatis, demonstrantur ut prius.

Quod si Parabolam velis adhiberi, abibit punctum E in infinitum, atque adeo nullibi capiendum erit, & punctum H cum puncto F coincidet eritque Parabola circa axem HL cum latere recto principali BC per puncta G & A describenda, sito vertice ad partes puncti F ad quas punctum B situm est respectu puncti C.

Si sunt constructiones per Parabolam, si simplicitatem analyticam spectes, simplicissimæ omnium, eæ per Hyperbolam proximum locum obtinent, & ultimum locum tenent quæ per Ellipsin absolvuntur. Quod si praxeos manualis in describendis figuris spectetur simplicitas, mutandus est ordo.

In hisce autem constructionibus observandum venit quod proportione lateris recti principalis ad latus transversum determinatur species Ellipseos & Hyperbolæ, & proportio illa eadem est quæ linearum BC & BE, atque adeo assumi potest: Parabolæ vero species est unica quam artifex ponendo BE infinite longam assequitur. Sic igitur penes artificem est æquationem quamcunque cubicam per conicam sectionem imperatæ speciei construere. A figuris autem specie datis ad figuras magnitudine datas devenietur augendo vel diminuendo in ratione data lineas omnes quibus figuræ specie dabantur, atque ita æquationes omnes cubicas per datam quamvis Conicam sectionem construere licebit. Id quod sic plenius explico.

Proponatur æquationem quamcunque cubicam $x^3 = pxx. qx. r$, ope datæ cujuscunque sectionis conicæ construere.

A puncto quovis B in recta quavis infinita BCE, cape duas quascunque longitudines BC, BE ad easdem partes si data Conisectio sit Ellipsis, ad contrarias si ea sit Hyperbola. Sit autem BC ad BE ut datæ sectionis latus rectum principale ad latus transversum, & BC nominata n. Cape $BA = \frac{q}{n}$, idque versus C si habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, in que eo cape AF æqualem p, & FG æqualem AF; TAB. XI. Fig. 3. 4.

item FI æqualem $\frac{r}{nn}$. Capiatur vero FI versus G si termini p & r habent eadem signa, aliter versus A. Dein fac ut sit FH ad FI ut BC ad BE, & hanc FH cape à puncto F versus I si sectio sit Ellipsis, aut ad partes contrarias si ea sit Hyperbola. Porro compleantur parallelogramma IACK & HAEL, & hæ omnes jam descriptæ lineæ transferantur ad datam sectionem Conicam, aut quod perinde est, his superponatur curva, ita ut axis ejus sive transversa diameter principalis conveniat cum recta LH & centrum cum puncto I. His ita constitutis agatur recta KL ut & recta GL secans conicam sectionem in g. In LK cape Lk quæ sit ad LK ut Lg ad LG, centroque k & intervallo kg describe circulum. A punctis ubi hic secuerit curvam impositam demitte perpendicula ad lineam LH, cujusmodi sit γ T. Denique versus γ, cape TY quæ sit ad Tγ ut LG ad Lg, & hæc TY producta secet rectam AB in X, eritque recta XY una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ jacent ad partes rectæ AB ad quas recta FI jacet à puncto F, & negativæ quæ jacent ad contrarias partes si modo habeatur $+r$, & contra si $-r$ obvenerit.

Hoc modo construuntur æquationes cubicæ per Ellipses & Hyperbolas datas: Quod si detur Parabola, capienda est BC æqualis lateri recto ipsius. Dein punctis A, F, G, I & K inventis ut ante, centro K intervallo KG describendus est circulus, & Parabola ita applicanda ad Schema jam descriptum (aut Schema ad Parabolam) ut ipsa transeat per puncta A & G, & axis ejus ipsi AC parallelus per punctum F, cadente vertice ad partes puncti illius F ad quas punctum B cadit à puncto C. His ita constitutis, si perpendicula ab ejus occursibus cum circulo demittantur ad lineam BC, eorum dimidia erunt radices æquationis construendæ.

Et notes quod ubi secundus æquationis terminus deest, & latus rectum Parabolæ ponitur numerus binarius, hæc constructio evadet eadem cum illa quam Cartesius attulit in Geometria sua, prætterquam quod lineamenta hic sunt illorum duplicia.

Hæc est constructionum regula generalis. Verum ubi problemata particularia proponuntur, consulendum est constructionum for-

formulis simplicissimis. Libera enim manet quantitas n, cujus assumptione constructio plerumque simplicior reddi potest. Ejus rei exemplum unum subjungo.

Detur Ellipsis, & inter datas lineas a & b inveniendæ sint duæ mediæ proportionales. Sit earum prima x, & $a. x. \frac{xx}{a}. b$ erunt continue proportionales, adeoque $ab = \frac{x^3}{a}$, seu $x^3 = aab$. æquatio est quam construere oportet. Hic desunt termini p, & q, & terminus r est aab, adeoque BA & AF nullæ sunt, & FI est $\frac{aab}{nn}$. Ut terminus novissimus evadat simplicior assumatur $n = a$, & fiet $FI = b$ Deinde constructio ita se habebit.

A puncto quovis A in recta quavis infinita AE cape $AC = a$, & ad easdem partes puncti A cape AC ad AE ut est Ellipseos latus rectum principale ad latus transversum. Tum in perpendiculo AI cape $AI = b$, & AH ad AI ut est AC ad AE. Compleantur parallelogramma IACK, HAEL. Jungantur LA, LK. Huic schemati imponatur Ellipsis data. Secet ea rectam AL in puncto g, Fiat Lk ad LK ut Lg ad LA. Centro k intervallo kg describatur circulus secans Ellipsin in γ. Ad AE demittatur perpendiculum γX secans HL in T, & producatur id ad Y ut sit TY ad Tγ sicut LA ad Lg. Sic fiet $\frac{1}{2}$XY prima duarum mediæ proportionalium x. Q. E. I. TAB. XI. Fig. 5.



DE SOLUTIONE ET CONSTRUCTIONE ÆQUATIONUM

SCRIPTA VARIA.

Ex TRANSACTIONIBUS PHILOSOPHICIS EXCERPTA.

METHODUS NOVA

Accurata & facilis inveniendi Radices Æquationum quarumcunque generaliter, fine prævia Reductione. Per
Edm. Halley, *Geom. Prof. Savil.*

Artis Analyticæ præcipuus quidem ufus eft Problemata Mathematica ad æquationes perducere, eafque terminis quantum fieri poffit fimpliciffimis exhibere. Ars autem ifta manca quodammodo, nec fatis Analytica merito videretur, nifi Methodi quædam fubminiftrarentur, quarum ope Radices, five Lineæ five Numeri fint, ex jam inventis æquationibus elicere liceret, eoque nomine Problemata foluta dare.

Veteribus fane vix quicquam fupra Quadraticarum æquationum naturam innotuit; quæcunque vero fcripfere de Solidorum Problematum Effectione Geometrica ope Parabolæ, Ciffoïdis, aliufve Curvæ, particularia tantum funt, ac cafibus particularibus deftinata; de Numericâ vero Extractione ubique altum filentium; ita ut quicquid in hoc genere jam calculo præftamus, modernorum inventis fere totum debetur.

Ac primus quidem ingens ille Algebræ hodiernæ repertor ac reftaurator *Francifcus Vieta*, annis abhinc circiter centum, Methodum generalem aperuit pro educendis radicibus ex æquatione qualibet; eamque fub titulo *De Numerofâ poteftatum ad Exegefin Refolutione* publico donavit, *ubique* ut ait *obfervando retrogradam Compofitionis viam.* Hujufque Veftigiis infiftentes *Harriottus*, *Oughtredus* aliique, tam noftrates quam extranei, quæcunque de hac re fcriptis mandarunt, à *Vietâ* defumpta debent agnofcere. Qualia vero in hoc negotio præftiterit fagaciffima ingenii *Newtoniani* vis, ex contractiore Specimine à Clariffimo *Wallifio*, Cap. XCIV. Algebræ fuæ, edi-

edito, potius conjecturâ assequi quam pro certo comperiri licet. Ac dum obstinata Authoris modestia amicorum precibus devicta cedat, inventaque hæc sua pulcherrima in lucem promere dignetur, expectare cogimur.

Nuper vero eximius ille juvenis *D. Josephus Raphson, R. S. S. Analysin Æquationum Universalem* Anno 1690. evulgavit, suæque Methodi præstantiam pluribus exemplis abunde illustravit; quo Genii Mathematici maxima quæque pollicentis nobile indicium prodidit.

Hujus exemplo ac ductu (ut par est credere) *D. de Lagney*, haud vulgaris apud *Parisienses* Mathematum Professor, idem argumentum aggressus est; qui cum totus fere sit in eliciendis Potestatum purarum radicibus, præsertim Cubica, pauca tantum eaque perplexa nec satis demonstrata de affectarum radicum extractione subjungit. Regulas autem binas compendiosas admodum pro approximatione radicis Cubicæ profert, alteram rationalem, alteram irrationalem; nempe Cubi $aaa+b$ latus esse inter $a+\frac{ab}{3aaa+b}$ ac $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{b}{3a}}+\frac{1}{2}a$: Radicem autem potestatis Quintæ a^5+b sic exprimit $=\frac{1}{2}a+\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4+\frac{b}{5a}}-\frac{1}{4}aa}$ (non $\frac{1}{2}aa$ ut perperam legitur in libro Gallico impresso.) Has Regulas, cum nondum librum videram, ab amico communicatas habui, quarum vires experimento edoctus, compendiumque admiratus, volui etiam Demonstrationem investigare: Ea vero inventa ad Universalem Æquationum omnium resolutionem eandem methodum accommodari posse statim cognovi; Eoque magis eas excolere statui, quia uno intuitu rem totam Synoptice explicari posse videbam, quodque hoc pacto singulis calculi restaurati vicibus saltem triplicarentur notæ sive Ciphræ in radice jam inventæ, quæ quidem omnibus aliorum omnium computationibus non nisi pari cum datis numero augentur.

Demonstrantur autem Regulæ prædictæ ex Genesi Cubi & Potestatis quintæ. Posito enim Latere Cubi cu usque $a+e$, Cubus inde conflatus fit $aaa+3aae+3aee+eee$, adeoque si supponatur

aaa

aaa Numerus Cubus proxime minor dato quovis non Cubo, eee minor erit Unitate, ac residuum sive b æquabitur reliquis Cubi membris $3aae+3aee+eee$: rejectoque eee ob parvitatem, $b=3aae+3aee$. Cumque aae multo majus sit quam aee, $\frac{b}{3aa}$ non multum excedet ipsam e, positoque $e=\frac{b}{3aa}$, $\frac{b}{3aa+3ae}$, cui proxime æquatur quantitas e, invenietur $=\frac{b}{3aa+\frac{3ab}{3aa}}$. sive $\frac{b}{3aa+\frac{b}{a}}$: hoc est $\frac{ab}{3aaa+b}=e$, adeoque latus Cubi $aaa+b$ habebitur $a+\frac{ab}{3aaa+b}$ quæ est ipsa formula rationis *Dni de Lagny*. Quod si aaa fuerit Numerus Cubus proxime major dato, Latus Cubi $aaa-b$ pari ratiocinio invenietur $a-\frac{ab}{3aaa-b}$; atque hæc Radicis Cubicæ approximatio satis expedita ac facilis parum admodum fallit in defectu, cum scilicet e residuum Radicis hoc pacto inventum paulo minus justo sit. Irrationalis vero formula etiam ex eodem fonte derivatur, *viz.* $b=3aae+3aee$, sive $\frac{b}{3a}=ae+ee$; adeoque $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{b}{3a}}=\frac{1}{2}a+e$, atque $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{b}{3a}}+\frac{1}{2}a=a+e$, sive Radici quæsitæ. Latus vero Cubi $aaa-b$ eodem modo habebitur $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-\frac{b}{3a}}$. Atque hæc quidem formula aliquanto propius ad scopum collimat, in excessu peccans sicut altera in defectu, ac ad praxin magis commoda videtur, cum restitutio Calculi nihil aliud sit quam continua additio vel subductio ipsius $\frac{eee}{3a}$, secundum ac quantitas e innotescat; ita ut potius scribendum sit $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{b-eee}{3a}}+\frac{1}{2}a$ in priori casu, ac in posteriori $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{eee-b}{3a}}$. Utraque au-

tem formula Ciphræ jam cognitæ in Radice extrahendâ ad minimum triplicantur, quod quidem Arithmeticæ studiosis omnibus gratum fore confido, atque ipse Inventori abunde gratulor.

Ut autem harum regularum utilitas melius sentiatur, exemplum unum vel alterum adjungere placuit. Quæratur Latus Cubi dupli, sive $aaa+b=2$. Hic $a=1$ atque $\frac{b}{3a}=\frac{1}{3}$, adeoque $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{7}{12}}$ sive $1,26$ invenietur Latus prope verum. Cubus autem ex $1,26$ est $2,000376$, adeoque $0,63+\sqrt{,3969-\frac{,000376}{3,78}}$ sive $0,63+\sqrt{,396800529100529\dot{1}}=1,259921049895-$; quod quidem tredecim figuris Latus Cubi dupli exhibet, nullo fere negotio, *viz.* unâ Divisione & Lateris Quadrati extractione, ubi vulgari operandi modo quantum desudasset Arithmeticus norunt experti. Hunc etiam calculum quousque velis continuare licet, augendo quadratum additione $\frac{eee}{3a}$. Quæ quidem correctio hoc in casu non nisi unitatis in Radicis figurâ decima-quartâ augmentum affert.

Exemp. II. Quæratur Latus Cubi æqualis mensuræ *Anglicæ Gallon* dictæ, uncias solidas 231 continentis. Cubus proxime minor est 216 cujus Latus $6=a$, ac residuum $15=b$, adeoque pro prima approximatione provenit $3+\sqrt{9+\frac{5}{6}}=$ Radici. Cumque $\sqrt{9,8333\ldots}$ sit $3,1358\ldots$ patet $6,1358=a+e$. Supponatur jam $6,1358=a$, & habebimus Cubum ejus $231,000853894712$, ac juxta regulam $3,0679+\sqrt{9,41201041-\frac{,000853894712}{18,4074}}$ æquatur accuratissime Lateri Cubi dati, id quod intra horæ spatium calculo obtinui $6.135792439661958\dot{9}7$, in octodecima figura justum, at deficiens in decima nona. Hæc vero formula merito præferenda est rationali, ob ingentem divisorem, non sine magno labore tractandum; cum Lateris quadrati extractio multo facilius procedat, ut experientia multiplex me docuit.

Regula autem pro Radice Surfolidi Puri sive potestatis quintæ paulo altioris indaginis est atque etiam adhuc multo perfectius rem

præ-

præstat: datas enim in Radice Ciphras ad minimum quintuplicat, neque etiam multi nec operosi est Calculi. Author autem nullibi inveniendi methodum ejusve demonstrationem concedit; etiamsi maxime desiderari videatur: præsertim cum in Libro impresso non recte se habeat; id quod imperitos facile illudere possit. Potestas autem Quinta Lateris $a+e$ conficitur ex his membris $a^5+5a^4e+10a^3ee+10a^2eee+5ae^4+e^5=a^5+b$, unde $b=5a^4e+10a^3ee+10a^2e^3+5ae^4$, rejecto e^5 ob parvitatem suam: quocirca $\frac{b}{5a}=a^3e+2a^2e^2+2ae^3+e^4$, atque utrinque addendo $\frac{1}{4}a^4$ habebimus $\sqrt{\frac{1}{4}aaaa+\frac{b}{5a}}=\sqrt{\frac{1}{4}a^4+a^3e+2a^2e^2+2ae^3+e^4}=\frac{1}{2}aa+ae+ee$. Dein utrinque subducendo $\frac{1}{4}aa$, $\frac{1}{2}a+e$ æquabitur $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4+\frac{b}{5a}}-\frac{1}{4}aa}$ cui si addatur $\frac{1}{2}a$, erit $a+e=\frac{1}{2}a+\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4+\frac{b}{5a}}-\frac{1}{4}aa}=$ radici potestatis a^5+b. Quod si fuisset a^5-b, (assumpta a justo majore,) regula sic se haberet, $\frac{1}{2}a+\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4-\frac{b}{5a}}-\frac{1}{4}aa}$.

Atque hæc regula mirum in modum approximat, ut vix restitutione opus sit; at dum hæc mecum pensitavi, incidi in formularum methodum quandam generalem pro quavis potestate satis concinnam, quamque celare nequeo; cum etiam in superioribus potestatibus datas radicis figuras triplicare valeant.

Hæ autem formulæ ita se habent tam rationales quam irrationales.

$$\sqrt{aa+b}=\sqrt{aa+b} \text{ vel } a+\frac{ab}{2aa+\frac{1}{2}b}$$

$$\sqrt[3]{a^3+b}=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{b}{3a}} \text{ vel } a+\frac{ab}{3aaa+b}$$

$$\sqrt[4]{a^4+b}=\frac{1}{3}a+\sqrt{\frac{1}{9}aa+\frac{b}{6aa}} \text{ vel } a+\frac{ab}{4a^4+\frac{3}{2}b}$$

$$\sqrt[5]{a^5+b}=\frac{1}{4}a+\sqrt{\frac{1}{16}aa+\frac{b}{10a^3}} \text{ vel } a+\frac{ab}{5a^3+2b}$$

$$\sqrt[6]{a^6+b} = \tfrac{4}{5}a + \sqrt{\tfrac{1}{25}aa + \frac{b}{15a^4}} \text{ vel } a + \frac{ab}{6a^6 + \frac{5}{2}b}$$

$$\sqrt[7]{a^7+b} = \tfrac{5}{6}a + \sqrt{\tfrac{1}{36}aa + \frac{b}{21a^5}} \text{ vel } a + \frac{ab}{7a^7 + 3b}.$$

Et sic de cæteris etiam adhuc superioribus. Quod si assumeretur a radice quæsita major; (quod cum fructu fit quoties Potestas resolvenda multo propior sit potestati Numeri integri proxime majoris quam proxime minoris,) mutatis mutandis eædem radicum expressiones proveniunt.

$$\sqrt{aa-b} = \sqrt{aa-b} \text{ vel } a - \frac{ab}{2aa - \frac{1}{2}b}$$

$$\sqrt[3]{aaa-b} = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - \frac{b}{3a}} \text{ vel } a - \frac{ab}{3aaa - b}$$

$$\sqrt[4]{a^4-b} = \tfrac{2}{3}a + \sqrt{\tfrac{1}{9}aa - \frac{b}{6aa}} \text{ vel } a - \frac{ab}{4a^4 - \frac{3}{2}b}$$

$$\sqrt[5]{a^5-b} = \tfrac{3}{4}a + \sqrt{\tfrac{1}{16}aa - \frac{b}{10a^3}} \text{ vel } a - \frac{ab}{5a^5 - 2b}$$

$$\sqrt[6]{a^6-b} = \tfrac{4}{5}a + \sqrt{\tfrac{1}{25}aa - \frac{b}{15a^4}} \text{ vel } a - \frac{ab}{6a^6 - \frac{5}{2}b}$$

$$\sqrt[7]{a^7-b} = \tfrac{5}{6}a + \sqrt{\tfrac{1}{36}aa - \frac{b}{21a^5}} \text{ vel } a - \frac{ab}{7a^7 - 3b}$$

Atque inter hos duos terminos semper consistit vera Radix, aliquanto proprior irrationali quam rationali; e vero juxta formulam irrationalem inventa, semper peccat in excessu, sicut in defectu a rationali formula resultans Quotus; adeoque si fuerit $+b$, Irrationalis majorem justo exhibet radicem, rationalis minorem. E contrario vero si fuerit $-b$. Atque hæc de eliciendis radicibus è Potestatibus puris dicta sunto, quæ quidem, ad usus ordinarios sufficientes multo facilius habentur ope Logarithmorum: quoties vero ultra Tabularum Logarithmicarum vires accuratissime definienda est radix, ad hujusmodi methodos necessario recurrendum est. Præterea cum ex harum formularum inventione ac contemplatione, Universalis Regula pro æquationibus affectis (quam non sine fructu Geometriæ ac Alge-

Algebræ ſtudioſis omnibus uſurpandam confido) mihi ipſi oblata ſit, volui ipſius inventi primordia qua poſſim claritate aperire.

Æquationum quidem affectarum Quadrato-quadratum non excedentium Conſtructionem Generalem concinnam admodum ac facilem, *Num.* 18ᵒ. harum *Tranſact.* jam tum inventam publici juris feci: ex quo ingens cupido animum inceſſit, idem Numeris efficiendi. Atque brevi poſt *Dⁿⁱ Raphſon* magna ex parte voto ſatisfeciſſe viſus eſt, uſque dum *Dⁿˢ de Lagny* etiam adhuc compendioſius rem peragi poſſe hoc ſuo libello mihi ſuggeſſit. Methodus autem noſtra hæc eſt.

Supponatur Radix cujuſvis æquationis z compoſita ex partibus $a +$ vel $- e$, quarum a ex hypotheſi aſſumatur ipſi z quantum fieri poſſit propinqua, (quod tamen commodum eſt, non neceſſarium) & ex quantitate $a +$ vel $- e$ formentur Poteſtates omnes ipſius z in Æquatione inventæ, iiſque affigantur Numeri Coefficientes reſpective: deinde Poteſtas Reſolvenda ſubducatur è ſumma partium datarum in prima columna, ubi e non reperitur, quam Homogeneum Comparationis vocant, ſitque differentia $\pm b$. Dein habeatur ſumma omnium coefficientium ipſius lateris e in ſecunda Columna, quæ ſit s; denique in tertia addantur omnes coefficientes quadrati ee, quarum ſummam vocemus t: Ac radix quæſita z, formula rationali habebitur $= a +$ vel $- \frac{sb}{ss + vel - tb}$: Irrationali vero fiet $z = a \mp \frac{\frac{1}{2}s \pm \sqrt{\frac{1}{4}ss + bt}}{t}$, id quod exemplis illuſtrare fortaſſe operæ pretium erit. Inſtrumenti vero loco adſit Tabella, Poteſtatum omnium ipſius $a +$ vel $- e$ Geneſin exhibens, quæ ſi opus fuerit continuari facile poſſit. A ſeptima vero incipiam, cum pauca Problemata eouſque aſſurgere deprehendantur. Hanc Tabellam jure optimo *Speculum Analyticum Generale* appellare licet. Poteſtates autem prædictæ ex continua multiplicatione per $a + e = z$ ortæ, ſic proveniunt, cum ſuis coefficientibus adjunctis.

Tabella Potestatum.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad s \qquad\quad t \qquad\quad u \qquad\quad w \qquad\quad x \qquad\quad y \\ lz^7 = la^7 + 7la^6e + 21la^5ee + 35la^4e^3 + 35la^3e^4 + 21la^2e^5 + 7lae^6 + le^7 \\ kz^6 = ka^6 + 6ka^5e + 15ka^4ee + 20ka^3e^3 + 15ka^2e^4 + 6kae^5 + ke^6 \\ hz^5 = ha^5 + 5ha^4e + 10ha^3ee + 10ha^2e^3 + 5hae^4 + he^5 \\ gz^4 = ga^4 + 4ga^3e + 6ga^2ee + 4gae^3 + ge^4 \\ fz^3 = fa^3 + 3fa^2e + 3faee + fe^3 \\ dz^2 = da^2 + 2dae + dee \\ cz = ca + ce \end{array}$$

Quod si fuerit $a - e = z$, ex iisdem membris conficitur Tabella, negatis solummodo imparibus Potestatibus ipsius e, ut e, e^3, e^5, e^7: & affirmatis paribus e^2, e^4, e^6. Sitque Summa Coefficientium lateris $e = s$; Summa Coefficientium Quadrati $ee = t$; Cubi $= u$; Biquadrati $= w$; Sursolidi $e^5 = x$; Summa vero coefficientium Cubo-cubi $= y$; *&c.*

Cum autem supponatur e exigua tantum pars radicis inquirendæ, omnes potestates ipsius e multo minores evadunt similibus ipsius a Potestatibus, adeoque pro prima Hypothesi rejiciantur superiores, (ut in potestatibus puris ostensum est) ac formata æquatione nova, substituendo $a \pm e = z$ habebimus ut diximus $\pm b = \pm se \pm tee$. Cujus rei cape exempla sequentia, quo melius intelligatur.

Exemp. I. Proponatur æquatio $z^4 - 3zz + 75z = 10000$. Pro prima Hypothesi ponatur $a = 10$, ac consequenter prodibit æquatio,

$$\begin{array}{rl} z^4 = & +\ a^4 \quad 4a^3e + 6a^2ee \quad 4ae^3 + e^4 \\ -dz^2 = & -\ da^2 \quad dae - dee \\ +cz = & +\ ca \quad ce \\ = & +\ 10000 \quad 4000e + 600ee \quad 40e^3 + e^4 \\ & -\ 300 \quad 60e - 3ee \\ & +\ 750 \quad 75e \\ & -\ 10000 \\ \hline & +\ 450 - 4015e + 597ee - 40e^3 + e^4 = 0 \\ & \qquad\qquad s \qquad\quad t \qquad\quad u \end{array}$$

Signis

Signis + ac − (respectu e ac e^3) in dubio relictis, usque dum sciatur an e sit negativa vel affirmativa; Quod quidem aliquam parit difficultatem, cum in æquationibus plures radices admittentibus, sæpe augeantur Homogenea Comparationis, ut appellant, à minuta quantitate a, ac è contra ea aucta minuantur. Determinatur autem signum ipsius e ex signo quantitatis b; sublata enim Resolvenda ex Homogeneo ab a formato, signum ipsius se, ac proinde partium in ejus compositione prævalentium, semper contrarium erit signo differentiæ b. Unde patebit an fuerit $-e$ vel $+e$, sive an a major vel minor radice vera assumpta sit. Ipsa autem e semper æquatur $\frac{\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}ss-bt}}{t}$, quoties b ac t eodem signo notantur; quoties vero diverso signo connectuntur, eadem e fit $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss+bt}-\frac{1}{2}s}{t}$. Postquam vero compertum sit fore $-e$, in affirmatis æquationis membris negentur e, e^3, e^5, &c. in negatis affirmentur; scribantur scilicet signo contrario; si vero fuerit $+e$, affirmentur in affirmatis, negentur in negatis. Habemus autem in hoc nostro exemplo 10450 loco Resolvendæ 10000, sive $b=+450$, unde constat a majorem justo assumptam, ac proinde haberi $-e$: Hinc æquatio fit $10450-4015e+597ee-40e^3+e^4=10000$. Hoc est $450-4015e+597ee=0$. Adeoque $450=4015e-597ee$ sive $b=se-tee$ cujus Radix e fit $\frac{\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}ss-bt}}{s}$. Vel si mavis $\frac{s}{2t}-\sqrt{\frac{ss}{4tt}-\frac{b}{t}}$, id est, in præsenti casu, $\frac{e=2007\frac{1}{2}-\sqrt{3761406\frac{1}{4}}}{597}$, unde provenit Radix quæsita prope verum, 9,886. Hoc vero pro secunda Hypothesi substituto, emergit $a+e=z$ accuratissime 9,88626039364̅9̅5̅ ...., in ultima figura vix binario justum superans; nempe cum $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss+bt}-\frac{1}{2}s}{t}=e$. Atque hoc etiam, si opus fuerit, multo ulterius verificari posset, subducendo $\frac{\frac{1}{2}ue^3+\frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss+tb}}$ si fuerit $+e$, vel addendo $\frac{\frac{1}{2}ue^3-\frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss-tb}}$ radici prius inventæ, si sit $-e$. Cujus compendium eo pluris æstimandum quod

quod quandoque, ex sola prima suppositione, semper vero ex secunda, iisdem conservatis coefficientibus quousque velis calculum continuare possis. Cæterum æquatio prædicta etiam negativam habet radicem, *viz.* $x = 10, 26\ldots\ldots$ quam cuilibet accuratius expiscari licet.

Exempl. II. Sit $z^3 - 17zz + 54z = 350$ ac ponatur $a = 10$. Ex præscripto Regulæ,

$$\begin{aligned} zzz &= aaa + 3aae + 3aee + eee \\ -dzz &= daa - 2dae - deee \\ +cz &= c\,a + c\,e \\ & \quad\; b \qquad\; s \qquad t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Id est } & +1000 + 300e + 30ee + eee \\ & -1700 - 340e - 17ee \\ & +540 + 54e \\ & -350 \end{aligned}$$

Sive $-510 + 14e + 13ee + eee = 0$.

Cum autem habeatur -510, constat a minorem justo assumi, ac proinde e affirmativam esse, ac ex $510 = 14e + 13ee$ fit $\frac{\sqrt{bt + \frac{1}{4}ss} - \frac{1}{2}s}{t} = e = \frac{\sqrt{6679} - 7}{13}$, unde z fit $15,7\ldots$ quæ nimia quidem est ob late sumptam a; ideo supponatur secundo $a = 15$, ac pari ratiocinio habebimus $e = \frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - tb}}{t} = \frac{109\frac{1}{2} - \sqrt{11710\frac{1}{4}}}{28}$ ac proinde $z = 14,954068$. Quod si calculum adhuc tertio restaurare velis, usque in vigesimam quintam figuram vero conformem invenies radicem: Paucioribus vero contentus, scribendo $tb \pm teee$ loco tb, vel subtrahendo aut addendo radici prius inventæ $\frac{\frac{1}{2}eee}{\sqrt{\frac{1}{4}ss \pm tb}}$ ad scopum statim pervenies. Æquatio vero proposita nulla alia radice explicari potest, quia Potestas Resolvenda 350 major est Cubo ex $\frac{17}{3}$ vel $\frac{1}{3}d$.

Exempl. III. Sit Æquatio illa quam in Resolutione difficillimi Problematis Arithmetici adhibet Clarissimus *Wallisius*, Cap. LXII. Alge-

Algebræ ſuæ, quo radicem *Vietæ* Methodo accuratiſſime quidem aſſecutus eſt: Eandemque exemplum Methodi ſuæ affert laudatus *D. Raphſon pag.* 25, 26. nempe $z^4 - 80z^3 + 1998z^2 - 14937z + 5000 = 0$. Hæc autem æquatio ejus formulæ eſt, ut plures habeat radices Affirmativas, ac quod difficultatem ejus augeat, prægrandes ſunt Coefficientes reſpectu Reſolvendæ datæ: Quo melius autem tractetur, dividatur, ac juxta notas punctationum regulas ponatur $- z^4 + 8z^3 - 20z^2 + 15z = 0,5$ (ubi z eſt $\frac{1}{10}z$ in æquatione propoſita) ac pro prima Hypotheſi habeamus $a = 1$. Proinde $+ 2 - 5e - 2ee + 4e^3 - e^4 - 0,5 = 0$.

Hoc eſt $1\frac{1}{2} = 5e + 2ee$; hinc $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss + bt} - \frac{1}{2}s}{t} = e$ fit $\frac{\sqrt{37} - 5}{4}$ adeoque $z = 1,27$: Unde conſtat 12,7 radicem eſſe æquationis propoſitæ vero vicinam. Secundo loco ſupponatur $z = 12,7$ ac juxta præſcriptum Tabellæ Poteſtatum oritur

$$\begin{array}{llll}
\quad b & \quad s & \quad t & \quad u \\
- 26014,4641 & - 8193,532e & - 697,74ee & - 50,8e^3 - e^4 \\
+ 163870,640 & + 38709,60\,e & + 3048\,ee & + 80\,e^3 \\
- 322257,42 & - 50749,2\,e & - 1998\,ee & \\
+ 189699,9 & + 14937\,e & & \\
- 5000 & & & \\
\hline
+ 298,6559 & - 5296,132e & + 82,26ee & + 29,2e^3 - e^4 = 0.
\end{array}$$

Adeoque $- 258,6559 = - 5296,132e + 82,26ee$, cujus radix e juxta regulam $= \frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}{t}$ fit $\frac{2648,066 - \sqrt{6987686,106022}}{82,26}$ $= ,0564408033\ldots = e$ minori vero: Ut autem corrigatur; $\frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}$ ſive $\frac{,0026201\ldots}{2643,423\ldots\ldots}$ fit $,00000099117$, ac proinde e correcta $= 056441794448$; Quod ſi adhuc plures radicis figuras deſideras, formetur ex e correcta $tue^3 - te^4 = 0,43105602423\ldots$, ac $\frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt - tue^3 + te^4}}{t}$ ſive $\frac{2648,066 - \sqrt{6987685,674965907577\ldots}}{82,26}$ $= 0564417944807 4402 = e$, unde $a + e = z$ radix accuratiſſima

fit 12, 7564417944807440 2.... qualem invenit Cl. *Wallisius* in loco citato. Ubi observandum redintegrationem calculi semper triplicare notas veras in assumpta a, quas prima correctio sive $\frac{\frac{1}{2}ue^3-\frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss-bt}}$ quintuplices reddit, quæque etiam commode per Logarithmos efficitur. Altera autem correctio post primam, etiam duplum Ciphrarum numerum adjungit, ut omnino assumptas septuplicet; prima tamen plerumque usibus Arithmetices abunde sufficit. Quæ verò dicta sunt de numero ciphrarum in radice rectè assumptarum, ita intelligi velim, ut cum a non nisi decima parte distet à vera radice, prima figura recte assumatur; si intra centesimam partem, duæ primæ: Si intra millesimam tres priores rite se habeant; quæ deinde juxta nostram regulam tractatæ statim novem evadunt.

Restat jam ut nonnulla adjiciam de nostrâ formula rationali, *viz.* $e=\frac{sb}{ss\pm tb}$, quæ quidem satis expedita videbitur, nec multum cedit priori, cum etiam datas ciphras triplicare valeat. Formata autem æquatione ex $a\pm e=z$, ut prius, statim patebit an a assumpta sit major vel minor vero, cum scilicet se signo semper notari debeat contrario signo differentiæ Resolvendæ ac Homogenei sui ex a producti. Deinde posito quod $\pm b\mp se$ + vel $-tee=0$; divisor fit $ss-tb$ quoties b ac t iisdem signis notantur; idem vero fit $ss+bt$, si signa ista diversa sint. Praxi autem magis accommodata videtur, si scriberetur Theorema, $e=\frac{\frac{b}{s}}{\pm\frac{tb}{s}}$ nempe cum una multiplicatione ac duabus divisionibus res peragatur, quæ tres multiplicationes ac unam divisionem alias requireret Hujus etiam Methodi exemplum capiamus à prædictæ Æquationis radice 12, 7...: ubi

$$\begin{array}{ccccc} 298{,}6559 & -\ 5296{,}132e & +\ 82{,}26ee & +\ 29{,}2e^3 & -\ e^4=0 \text{ adeoque} \\ +b & -\ s & +\ t & +\ u & \end{array}$$

$\frac{\frac{b}{s}}{-\frac{tb}{s}}=e$, hoc est, fiat ut s ad t ita b ad $\frac{tb}{s}=5296{,}132)\ 298{,}$

6559 in 82,26 (4,63875... quocirca divisor fit $s - \frac{tb}{s} = 5291,49325....$) 298,6559 (0, 056441 .....$= e$, *viz.* quinque figuris veris adjectis radici assumptæ. Corrigi autem nequit hæc formula sicut præsens irrationalis; adeoque si plures desiderentur radicis figuræ, præstat assumpta nova Hypothesi calculum de integro repetere: ac novus Quotus triplicando figuras in radice cognitas supputatori etiam maxime scrupuloso abunde satisfaciet.

FINIS.



ÆQUATIONUM CUBICARUM

Et Biquadraticarum, tum Geometrica & Mechanica, Resolutio Universalis,

a J. COLSON.

§. 1. Æquationis Cubicæ universalis $\left\{\begin{array}{l} x^3 = 3p\,x^2 + 3q\,x + 2r, \\ \qquad\quad\;\; -3p^2 \quad + p^3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 3pq \end{array}\right.$

Radices Tres sunt,

$$x = p + \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} + \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$$

$$x = p - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$$

$$x = p - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$$

Vel ut Calculus Arithmeticus facilior ac paratior evadat, si posueris Binomii irrationalis $r + \sqrt{r^2 - q^3}$ Radicem cubicam esse $m + \sqrt{n}$, erunt ejusdem æquationis Radices tres $x = p + 2m$ & $x = p - m \pm \sqrt{-3n}$.

Igitur data Æquatione quâvis Cubica, inter ejus hujusque Æquationis Universalis terminos singulos instituenda est Comparatio, quô pactô facillimè invenientur ipsæ p, q, r; & hisce cognitis, innotescent Æquationis datæ Radices omnes. Hujus verò solutionis Exempla sint sequentia in Numeris.

1. Æquationis Cubicæ $x^3 = 2x^2 + 3x + 4$ sit Radix x indaganda. Erit primò juxta præscriptum $3p = 2$, sive $p = \frac{2}{3}$. Secundò $3q - (3p^2)\,\frac{4}{3} = 3$, sive $q = \frac{13}{9}$. Tertio $2r$ $(+p^3 - 3q \times p)$

$-\frac{70}{27}=4$, sive $r=\frac{89}{27}$ & $r^2-q^3=\frac{212}{27}$. Et propterea $x=\frac{2}{3}+\sqrt[3]{\frac{89}{27}+\sqrt{\frac{212}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{89}{27}-\sqrt{\frac{212}{27}}}$. Reliquæ duæ Radices sunt impossibiles.

2. In Æquatione $x^3=12x^2-41x+42$, erit primò $3p=12$; sive $p=4$. Secundò $3q-(3p^2)\ 48=-41$, sive $q=\frac{7}{3}$. Tertiò $2r+(p^3-3q\times p)\ 36=42$, sive $r=3$; Et inde $r^2-q^3=-\frac{100}{27}$. At Binomii surdi $3+\sqrt{-\frac{100}{27}}\,(=r+\sqrt{r^2-q^3})$ Radix Cubica, per Methodos ex Arethmeticâ petendas extracta, est $-1+\sqrt{-\frac{4}{3}}$, $(=m+\sqrt{n},)$ & proinde Radix $x=(p+2m=4-2=)\ 2$ vel etiam $x=(p-m\pm\sqrt{-3n}=4+1\pm(\sqrt{4})\ 2=)\ 7$ vel 3. Vel rursus, ejusdem Binomii $3+\sqrt{-\frac{100}{27}}$. Radix alia Cubica (tres enim agnoscit) est $\frac{3}{2}+\sqrt{-\frac{1}{12}}$ $(=m+\sqrt{n},)$ & proinde Radix $x=(p+2m=4+3=)\ 7$, & etiam $x=(p-m\pm\sqrt{-3n}=4-\frac{3}{2}\pm(\sqrt{\frac{1}{4}})\ \frac{1}{2}=)\ 3$ vel 2. Vel denuò, ejusdem Binomii $3+\sqrt{-\frac{100}{27}}$ Radix cubica tertia est $-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{25}{12}}$, $(=m+\sqrt{n},)$ & proinde Radix $x=(p+2m=4-1=)\ 3$, atque etiam $x=(p-m\pm\sqrt{-3n}=4+\frac{1}{2}\pm(\sqrt{\frac{25}{4}})\ \frac{5}{2}=)\ 7$ vel 2.

3. In Æquatione $x^3=-15x^2-84x+100$, erit $p=-5$, $q=-3$, $r=135$; & Binomii $135+\sqrt{18252}$ Radix Cubica est $3+\sqrt{12}$. Igitur Radix $x=-5+6=1$, & $x=-5-3\pm\sqrt{-36}=-8\pm\sqrt{-36}$, impossibiles.

4. In Æquatione $x^3 = 34x^2 - 310x + 1012$, erit $p = \frac{34}{3}$, $q = \frac{226}{9}$, $r = \frac{5536}{27}$; & Binomii $\frac{5536}{27} + \sqrt{\frac{707560}{27}}$ Radix Cubica est $\frac{16}{3} + \sqrt{\frac{10}{3}}$. Igitur Radix $x = \frac{34}{3} + \frac{32}{3} = 22$, & $x = \frac{34}{3} - \frac{16}{3} \pm \sqrt{-10} = 6 \pm \sqrt{-10}$, impossibiles.

5. In Æquatione $x^3 = 28x^2 + 61x - 4048$, erit $p = \frac{28}{3}$, $q = \frac{967}{9}$, $r = -\frac{25010}{27}$; & Binomii $-\frac{25010}{27} + \sqrt{-382347}$. Radix cubica est $\frac{41}{6} + \sqrt{-\frac{243}{4}}$. Igitur $x = \frac{28}{3} + \frac{41}{3} = 23$, & $x = \frac{28}{3} - \frac{41}{6} \pm (\sqrt{\frac{729}{4}})\,\frac{27}{2} = 16$ vel -11.

6. In Æquatione $x^3 = -x^2 + 166x - 660$, erit $p = -\frac{1}{3}$, $q = \frac{449}{9}$, $r = -\frac{9658}{27}$; & Binomii $\frac{9658}{27} + \sqrt{-\frac{1147205}{27}}$ Radix Cubica est $-\frac{22}{3} + \sqrt{-\frac{5}{3}}$. Igitur $x = -\frac{1}{3} - \frac{44}{3} = -15$, & $x = -\frac{1}{3} + \frac{22}{3} \pm \sqrt{5} = 7 \pm \sqrt{5}$, irrationales.

7. In Æquatione $x^3 = 63x^2 + 99673x + 9951705$, erit $p = 21$, $q = \frac{100996}{3}$, $r = 6031680$; & Binomii $6031680 + \sqrt{-\frac{47887175043136}{27}}$ Radix Cubica est $183 + \sqrt{-\frac{529}{3}}$. Igitur $x = 21 + 366 = 387$, & $x = 21 - 183 \pm (\sqrt{529})\,23 = -139$ vel 185.

Nec secus in cæteris procedendum: Investigatur autem Theorema ad modum sequentem. Pono Æquationis cujusdam Cubicæ Radicem $z = a + b$, & cubicè multiplicando proveniet $z^3 = (a^3 +$

$3a^2$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =)\ a^3 + 3ab \times \overline{a+b} + b^3$. Jam loco ipsius $a + b$ valorem ejus z substituendo, fiet $z^3 = 3abz + a^3 + b^3$, quæ est Æquatio Cubica ex Radice $z = a + b$ constructa, cui terminus secundus deest. Ut hæc verò ad formam magis commodam, magisque concinnam revocentur, sumo Æquationem $z^3 = 3qz + 2r$, quæ posthâc ipsius $z^3 = 3abz + a^3 + b^3$, vices gerat. Igitur transmutatione hujus in illam, fiet primò $3q = 3ab$, sive $q^3 = a^3 b^3$; & secundò $2r = a^3 + b^3$, sive $2ra^3 = (a^6 + a^3 b^3 =)\ a^6 + q^3$. Et solutâ hâc æquatione quadraticâ, erit $a^3 = r + \sqrt{r^2 - q^3}$, & hinc $b^3 = (2r - a^3 =)\ r - \sqrt{r^2 - q^3}$: Atque igitur tandem $a = \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$ & $b = \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$. Et propterea in Æquatione Cubicâ $z^3 = 3qz + 2r$ erit Radix $z = (a + b =)$ $\sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} + \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$.

At verò hæc Radix reverâ triplex est, pro triplici valore quem induere potest & $\sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$ & $\sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$. Cujusvis enim quantitatis Radix Cubica triplex erit, & ipsius Unitatis Radix Cubica vel est 1, vel $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, vel $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$: Atque id adeò, propterea quod harum alicujus Cubus sit Unitas. Igitur si $1 \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$ aut $\sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$ $(= \sqrt[3]{1 \times r + \sqrt{r^2 - q^3}} = \sqrt[3]{1} \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}})$ Radicem aliquam [quam supra nominavimus $m + \sqrt{n}$, aut $1 \times \overline{m + \sqrt{n}}$,] Cubi $r + \sqrt{r^2 - q^3}$ designet; ipsæ $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$ & $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$ [i. e. $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \times \overline{m + \sqrt{n}}$ & $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times \overline{m + \sqrt{n}}$] alias duas ejusdem Cubi Radices designabunt. Similiter & $\sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$, $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

K

$\times\sqrt{r-\sqrt{r^2-q^3}}$, & $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{r-\sqrt{r^2-q^3}}$, [i. e. $m-\sqrt{n}$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\overline{m-\sqrt{n}}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\overline{m-\sqrt{n}}$,] tres Cubicæ Radices erunt Apotomes $r-\sqrt{r^2-q^3}$. Atque has Radices debitè connectendo, fiet $z=\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2-q^3}}+\sqrt[3]{r-\sqrt{r^2-q^3}}$, [i, e. $z=\overline{m+\sqrt{n}}+\overline{m-\sqrt{n}}=2m$,] $z=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2-q^3}}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{r-\sqrt{r^2-q^3}}$, [i. e. $z=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\overline{m+\sqrt{n}}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\overline{m-\sqrt{n}}=-m+\sqrt{-3n}$,] & $z=-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2-q^3}}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{r-\sqrt{r^2-q^3}}$ [i. e. $z=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\overline{m+\sqrt{n}}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\overline{m-\sqrt{n}}=-m-\sqrt{-3n}$,] quæ tres erunt Radices Æquationis Cubicæ $z^3=3qz+2r$. Debitè autem connectuntur Radices istæ ad modum præcedentem, quippe quæ sic connexæ, & more vulgari in se invicem continuò ductæ, Æquationem $z^3=3qz+2r$ restituunt. Denique fac $z=x-p$, & Æquatio fiet $x^3-3px^2+3p^2x-p^3=3qx-pq+2r$, quæ universalis est, & cujus Radices evadunt ut supra fuerunt exhibitæ.

Hic obiter notatû dignum est, quod Æquationis Cubicæ cujuscunque Radices omnes sint possibiles & reales, quoties Binomii membrum irrationale $\sqrt{r^2-q^3}$ impossibilitatem in se complectitur; hoc est, quoties q est quantitas affirmativa, & simul cubus ejus major est quadrato ex latere r. At si membrum istud $\sqrt{r^2-q^3}$ sit possibile, hoc est si q sit quantitas negativa, aut etiam si affirmativæ cubus sit minor quadrato ex latere r, tunc unicam tantùm agnoscit Æquatio Radicem possibilem & realem, reliquæque duæ erunt impossibiles.

In

In hoc Theoremate si fiat $p = o$, hoc est, si desit Æquationis terminus secundus, tunc deventum erit ad casum Regularum quæ dicuntur *Cardani*, cujus solutio continetur in præcedentibus.

§. 2. Æquationis Biquadraticæ Universalis

$$x^4 = 4px^3 + \begin{array}{l} 2qx^2 + 8rx + 4s, \\ -4p^2 - 4pq - q^2 \end{array}$$

Radices quatuor sunt $x = p - a \pm \sqrt{p^2 + q - a^2 - \frac{2r}{a}}$, & $x = p + a \pm \sqrt{p^2 + q - a^2 + \frac{2r}{a}}$, Ubi a est Radix Æquationis Cubicæ $a^6 = \begin{array}{l} p^2 \\ +q \end{array} a^4 \begin{array}{l} -2pr \\ -s \end{array} a^2 + r^2$.

Jam datâ Æquatione quâvis Biquadraticâ, inter ejus hujusque Æquationis Universalis terminos singulos instituenda est comparatio, quò pactò citissimè invenientur ipsæ p, q, r, s; & hisce cognitis, non latebit valor ipsius a, ex Theoremate superiori inveniendus, & tum demum innatescent Æquationis datæ Radices omnes.

Huic solutioni illustrandæ Exemplum unum aut alterum sufficiat.

1. Æquationis Biquadraticæ $x^4 = 8x^3 + 83x^2 - 162x - 936$ sint Radices extrahendæ. Erit primò juxta præscriptum $4p = 8$, sive $p = 2$. Secundò $2q - (4p^2)\ 16 = 83$, sive $q = \frac{99}{2}$. Tertiò $8r - (4pq)\ 396 = -162$, sive $r = \frac{117}{4}$. Quartò $4s - (q^2)\ \frac{9801}{4} = -936$, sive $s = \frac{6057}{16}$. Hinc $p^2 + q = \frac{107}{2}$, $2pr + s = \frac{7929}{16}$, $r^2 = \frac{13689}{16}$, & proinde $a^6 = \frac{107}{2} a^4 - \frac{7929}{16} a^2 + \frac{13689}{16}$. Jam ut Æquatio hæc aliquatenus Cubica in Radices ejus resolvatur, ad Theorema præcedens recurrendum est, in quo erit $p = \frac{107}{2}$, $q = \frac{22009}{144}$, $r = \frac{2903923}{1728}$, & $r^2 - q^3 = -\frac{11940075}{16}$. Atqui Binomii $\frac{2903923}{1728} + \sqrt{-\frac{11940075}{16}}$

Radix Cubica est $-\frac{53}{12}+\sqrt{-\frac{400}{3}}$ & propterea $a^2=\frac{107}{6}-\frac{53}{6}=9$, & etiam $a^2=\frac{107}{6}+\frac{53}{12}\pm(\sqrt{400})\ 20=\frac{169}{4}$ vel $\frac{9}{4}$: Vel quod perinde est, Æquationis præmissæ reverà Cubicæ sex Radices sunt $a=\pm 3$, $a=\pm\frac{13}{2}$, & $a=\pm\frac{3}{2}$, quarum quævis indiscriminatim proposito nostro faciet satis. Puta si in præsenti casu fiat $a=3$, erit juxta Theorema $x=(p-a\pm\sqrt{p^2+q-a^2-\frac{2r}{a}}=2-3\pm\sqrt{4+\frac{99}{2}-9-\frac{39}{2}}=-1\pm(\sqrt{25})\ 5=)\ 4$ vel -6, & $x=(p+a\pm\sqrt{p^2+q-a^2+\frac{2r}{a}}=2+3\pm\sqrt{4+\frac{99}{2}-9+\frac{39}{2}}=5\pm(\sqrt{64})\ 8=)$ 13 vel -3, quæ sunt Æquationis datæ Radices quatuor.

2. In Æquatione $x^4-20x^3+252x^2-6592x+21312$, erit $p=5$, $q=176$, $r=-384$, & $s=13072$. Hinc $p^2+q=201$, $2pr+s=9232$, & $r^2=147456$; & inde $a^6=201\ a^4-9232\ a^2+147456$. Jam in Theoremate pro Cubicis erit $p=67$, $q=\frac{4235}{3}$, & $r=65219$; eritque Binomii $65219+\sqrt{\frac{3888930707 2}{27}}$ Radix Cubica $\frac{77}{2}+\sqrt{\frac{847}{12}}$. Igitur $a^2=67+77=144$, sive $a=12$; & proinde $x=5-12\pm\sqrt{25+176-144+64}=-7\pm(\sqrt{121})$ 11 $=4$ vel -18, & $x=5+12\pm\sqrt{25+176-144-64}=17\pm\sqrt{-7}$, impossibiles.

Hujus autem Theorematis Inventio est hujusmodi. Ex duarum Æquationum Quadraticarum $z^2+2az-b=0$, & $z^2-2az-c=0$ in se invicem multiplicatione, Æquationem conficio Biquadraticam $z^4=\overline{4a^2+b+c}\times z^2+\overline{2ac-2ab}\times z-bc$, cui terminus secundus deest, quamque huic Æquationi $z^4=ez^2+fz+g$ statuo æquipollere. Unde primò $4a^2+b+c=e$ sive $b=e-4a^2-c$.

Se-

Secundò $2ac - 2ab = f$, hoc eſt, $2ac - 2ae + 8a^3 + 2ac = f$, ſive $c = \frac{f}{4a} + \frac{e}{2} - 2a^2$, & inde $b = (e - 4a^2 - c =) - \frac{f}{4a} + \frac{e}{2} - 2a^2$. Tertiò $-bc = g$, ſive $-\frac{f^2}{16a^2} + \frac{e^2}{4} - 2ea^2 + 4a^4 = -g$, hoc eſt, $a^6 = \frac{1}{2}ea^4 - \frac{1}{4}ga^2 - \frac{1}{16}e^2a^2 + \frac{f^2}{64}$, quæ Æquatio quaſi Cubica eſt, ex Radice a^2 & notis vel aſſumptis e, f, g conflata. Ea verò Radix per Theorema ſuperius exhiberi poteſt; & eodem calculo innoteſcent ipſæ b & c. At Æquationum $z^2 + 2az - b = 0$ & $z^2 - 2az - c = 0$ Radices ſunt $z = -a \pm \sqrt{a^2+b}$ & $z = a \pm \sqrt{a^2+c}$, ſive $z = -a \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}e - a^2 - \frac{f}{4a}}$, & $z = a \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}e - a^2 + \frac{f}{4a}}$, quæ proinde erunt Radices Æquationis $z^4 = ez^2 + fz + g$; cognita videlicet a vel a^2 ex Æquatione $a^6 = \tfrac{1}{2}ea^4 - \tfrac{1}{4}ga^2 - \tfrac{1}{16}e^2a^2 + \frac{f^2}{64}$. Jam ut Æquatio iſta evadat univerſalis, & omnibus ſuis terminis inſtructa, fac $z = x - p$, eritque $x^4 - 4px^3 + 6p^2x^2 - 4p^3x + p^4 = ex^2 - 2pex + p^2e + fx - fp + g$, item & $x = p - a \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}e - a^2 - \frac{f}{4a}}$, & $x = p + a \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}e - a + \frac{f}{4a}}$. Tandem concinnitatis & compendii gratiâ, fac $e = 2q + 2p^2$ & $f = 8r$; tum $x^4 - 4px^3 + 4p^2x^2 = 2qx^2 - 4pqx + 2p^2q + p^4 + 8rx - 8pr + g$, $x = p - a \pm \sqrt{p^2 + q - a^2 - \frac{2r}{a}}$, $x = p + a \pm \sqrt{p^2 + q - a^2 + \frac{2r}{a}}$, & $a^6 = \overline{p^2+q} \times a^4 - \overline{\tfrac{1}{4}g + \tfrac{1}{4}p^4 + \tfrac{1}{2}p^2q + \tfrac{1}{4}q^2} \times a^2 + r^2$. Denique fac $g = 4s - q^2 + 8pr - p^4 - 2p^2q$, & fiunt Æquationes præcedentes

$$\begin{array}{lllll} x^4 = 4px^3 + 2qx^2 + 8rx + 4s & \& & a^6 = p^2a^4 - 2pra^2 + r^2. \\ -4p^2 - 4pq - q^2 & & + q - s \end{array}$$

Scilicet omnia evadunt ut ſupra ſunt poſita.

§. 3. Hactenus de Æquationum Cubicarum & Biquadraticarum Reſolutione Analytica. Quoniam autem earundem *Effectio Geometrica* per Parabolam vulgo tradi ſolet, & nonnullis in pretio eſt, ipſam

ipsam συνθετικῶς, & quidem universalius non pigebit hic exhibere.

Data Æquatione quâvis vel Cubicâ vel Biquadratica, instituenda est comparatio inter terminòs ejus, terminosque respondentes hujus Æquationis

$$\begin{array}{lllll} x^4 = \frac{2p}{q}x^3 & + \frac{4pr}{q}x^2 & + \frac{2p^2}{q}x & + p^2, \\ \quad - 4r & - 4r^2 & - \frac{2ps}{q} & - q^2 \\ & + 2s & + 4rs & - s^2 \\ & - 1 & - 2g & + t^2 \end{array}$$

quo pacto facile satis eruentur ipsæ p, q, r, s, t; earum interim unâ aliquâ utcunque pro lubitu assumpta. Tum in Parabola quâvis data AVB, cujus Vertex principalis V, Axis VS, & Axi perpendicularis VT; capiatur $VS = p$ versus interiora Parabolæ, & in angulo SVT inscribatur $ST = q$, quæ producta Parabolam secet in punctis binis N & O. Bisecetur ON in M, & per M agatur MA Axi Parallela & Parabolæ occurrens in A. Ipsi ON parallela ducatur AL, ut sit AL Latus rectum Parabolæ ad Diametrum AM, sitque hæc eadem Unitas. In AL (utrinque si opus est producta) capiatur $AG = r$, & à puncto G ducatur GR Axi parallela, quæ Parabolam secet in B, à quo capiatur $BR = s$. A novissimè invento puncto R ducatur RE ipsi VT parallela & æqualis, quæ sinistram versus jaceat, respectû ipsius R si q sit quantitas affirmativa, at versus dextram si q sit negativa. Atque idem de ipsis AG & BR intelligatur, quæ ad contrarias itidem partes duci debent, si modò valores ipsarum r & s prodeant negativi. Denique centro E & Radio EC t describatur Circulus CKkc, qui Parabolam in totidem secabit punctis, quot sunt Æquationis datæ Radices reales. Etenim à punctis istis C, K, &c. ducantur CP, Kn &c. ipsi ST parallelæ, & ad rectam GR (si opus est productam) terminatæ, eritque harum quævis x, seu Æquationis datæ Radix quæsita; eæ scilicet ad dextram jacentes erunt Radices affirmativæ, quæ verò ad sinistram sunt positæ, erunt Radices negativæ. Punctum contactus, si quod fuerit, hic sumitur pro intersectionis punctis duobus ad invicem vicinissimis.

TAB. XII. Fig. 1.

In-

Inter Æquationes Cubicas & Biquadraticas ita constructas hoc tantum intercedit discriminis, quod in prioribus, ob terminum ultimum in præcedente Æquatione deficientem, semper sit $p^2 - q^2 - s^2 + t^2 = 0$, sive $t = \sqrt{s^2 + q^2 - p^2}$. Igitur centro C & Radio EB $(= \sqrt{BRq + (ERq)\ STq - VSq})$ descripto Circulo $CKkc$, Radicum una CP in priore constructione in nihilum abit.

Hæc autem demonstrantur ad modum sequentem Manentibus jam constructis, & productâ CP, si opus est, donec secat AM in H, erit CH ordinata Parabolæ ad Diametrum AH, & proinde $CHq = AL \times AH = AH$, ob $AL = 1$. At $CH = CP + AG$, & $AH = GB + BP$, & propterea $CPq + 2AG \times CP + AGq = GB + BP$; sed ob naturam Parabolæ erit $AGq = GB$, unde $CPq + 2AG \times CP = BP$. Jam à puncto C ad ipsam BP demittatur norma CD, quæ occurrat etiam ipsi EI, ad BP actæ parallelæ, in puncto I. Propter Similia Triangula CDP & TVS, erit $DP = \frac{VS \times CP}{ST}$ & $CD = \frac{VT \times CP}{ST}$, & proinde $CPq + 2AG \times CP = BP = DP + BD = \frac{VS \times CP}{ST} + BR - IE$, sive $CPq + 2AG \times CP - \frac{VS}{ST}CP - BR = -IE$. Ast $IEq = CEq - CIq = CEq - CDq - VTq - 2CD \times VT = CEq - \frac{VTq \times CPq}{STq} - VTq - \frac{2VTq \times CP}{ST} =$ (ob $VTq = STq - SVq$) $CEq - CPq + \frac{SVq}{STq}CPq - STq + SVq - 2ST \times CP + \frac{2SVq}{ST}CP$, quæ igitur æqualis erit Quadrato ex Latere $CPq + 2AG \times CP - \frac{VS}{ST}CP - BR$. Atque hæc Æquatio ad terminos p, q, r, s, t revocata ipsissima fit Æquatio proposita.

Hinc liquet, quod eadem quævis Æquatio Biquadratica innumeras per Parabolam constructiones sortiri possit, pro indefinito valo-

rum in orbem, secumque circumducat filum FZP. Hâc fili circulatione pondus P nunc ascendet nunc descendet motu reciproco, ut & Nodus N nunc supra rectam AQ extabit, nunc verò infra eandem deprimetur. Quoties autem reperietur Nodus ille N in ipsa AQ, puta in punctis $D, d\Delta, \delta$, abscindet is rectas DQ, dQ, ΔQ, δQ, quæ erunt Æquationis datæ Radices omnes reales; hæ nempe ad dextram erunt Radices affirmativæ, illæ verò ad sinistram Radices negativæ. Demonstratio est Manifesta ex præcedentibus, habitâ tantùm ratione Parabolæ, per puncta B, C, c, k, K, transeuntis. Nam posito F foco Parabolæ, (cujus distantia à Vertice ast $\frac{1}{4}ON$,) notum est quod lineæ omnes ut $FB + BQ$, $FC + CD$, &c, eandem ubique conficiant summam.

Atque ex principiis hic positis proclive erit Instrumentum haud inconcinnum & quantumvis accuratum fabricari, cujus beneficio hujusmodi Æquationum quarumcunque Radices nullô ferè negotiô inveniri possint, & præ oculis exhiberi. Hoc autem quilibet, si id Curæ sit, variis modis pro ingenio suo efficere potest, & de his jam satis.



ÆQUA-

ÆQUATIONUM QUARUNDAM

Poteſtatis tertiæ, quintæ, ſeptimæ, nonæ, & ſuperiorum, ad infinitum uſque pergendo, in terminis finitis, ad inſtar Regularum pro Cubicis quæ vocantur Cardani, Reſolutio Analytica.

Per AB. DE MOIVRE, R. S. S.

SIt n Numerus quicunque, y quantitas incognita, ſive Æquationis Radix quæſita, ſitque a quantitas quævis omninò cognita, ſive ut vocant Homogeneum Comparationis: Atque horum inter ſe relatio exprimatur per Æquationem

$$ny + \frac{nn-1}{2\times3}ny^3 + \frac{nn-1}{2\times3}\times\frac{nn-9}{4\times5}ny^5 + \frac{nn-1}{2\times3}\times\frac{nn-9}{4\times5}\times\frac{nn-25}{6\times7}ny^7, \text{ \&c.} = a$$

Ex hujus ſeriei naturâ manifeſtum eſt, quod ſi n ſumatur numerus aliquis impar (integer ſcilicet, nec refert utrum ſit affirmativus vel negativus) tunc ſeries ſponte ſua terminabitur, & Æquatio fit una ex ſupra præfinitis, cujus Radix eſt

$$(1)\; y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}}$$

$$\text{vel } (2)\; y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a} - \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a}$$

$$\text{vel } (3)\; y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a}} - \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a}$$

$$\text{vel } (4)\; y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a}} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}}$$

Exem-

Exempli gratia, sit hujus Æquationis potestatis quintæ $5y + 20y^3 + 16y^5 = 4$ Radix invenienda, quo in casu erit $n = 5$ & $a = 4$. Radix juxta formam primam erit $y = \frac{1}{2}\sqrt[5]{\sqrt{17}+4} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[5]{\sqrt{17}+4}}$, quæ in numeris vulgaribus expeditissimè explicari potest ad hunc modum. Est $\sqrt{17}+4 = 8.1231$, cujus Logarithmus 0.9097164, & hujus pars quinta 0.1819433, huic respondens numerus est $1,5203 = \sqrt[5]{\sqrt{17}+4}$. Ipsius verò 0.1819433 Complementum Arithmeticum est, 9.8180567. cui respondet numerus $0.6577 = \frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt{17}+4}}$. Igitur horum numerorum semidifferentia $0.4313 = y$.

Hic venit observandum quod loco Radicis generalis, non incommodè sumeretur $y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2a} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{2a}}$, quando numerus a respectu unitatis, est satis magnus, ut si Æquatio fuerit $5y + 20y^3 + 16y^5 = 682$, erit Log. $2a = 3.1348143$, cujus pars quinta 0.6269628, & huic respondens numerus 4.236. Complementi autem Arithmetici 9.3730372 numerus est 0.236 & horum numerorum semidifferentia $2 = y$.

Atqui præterea, si in Æquatione præcedenti signa alternatim sint affirmantia & negantia, vel quod eodem redit, si series obvenerit hujusmodi

$$ny + \frac{1-nn}{2\times3}ny^3 + \frac{1-nn}{2\times3}\times\frac{9-nn}{4\times5}ny^5 + \frac{1-nn}{2\times3}\times\frac{9-nn}{4\times5}\times\frac{25-nn}{6\times7}ny^7, \text{ \&c.} = a$$

erit hujus Radix

$$(1)\ y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{a+\sqrt{aa-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a+\sqrt{aa-1}}}$$

vel (2) $y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{a+\sqrt{aa-1}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{a-\sqrt{aa-1}}$

vel (3) $y = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a-\sqrt{aa-1}}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{a-\sqrt{aa-1}}$

vel (4) $y = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a-\sqrt{aa-1}}} + \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a+\sqrt{aa-1}}}$

Hic autem notandum, quòd si $\frac{n-1}{2}$ numerus extiterit impar, Radicis inventæ signum in ei contrarium permutandum est.

Proponatur Æquatio $5y - 20y^3 + 16y^5 = 6$, unde $n = 5$ & $a = 6$. Erit Radix $= \frac{1}{2}\sqrt[5]{6+\sqrt{35}} + \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt[5]{6+\sqrt{35}}}$. Vel quoniam $6+\sqrt{35} = 11.916$, erit hujus logarithmus 1.0761804 & ejus pars quinta 0.2152361, Complementum verò Arithmeticum 9.7847639. Horum Logarithmorum numeri sunt 1.6415 & 0.6091 respectivè, quorum semisumma $1.1253 = y$.

Verùm si acciderit ut a sit minor unitate, tunc Radicis forma secunda, ut quæ proposito est magis conveniens, præ reliquis seligenda est. Sic si Æquatio fuerit $5y - 20y^3 + 16y^5 = \frac{61}{64}$, erit $y = \frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{61}{64}+\sqrt{\frac{-375}{4096}}} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{61}{64}-\sqrt{\frac{-375}{4096}}}$. Et quidem si Binomialium Radix quintana ullo pacto extrahi queat, prodibit Radix proba & possibilis, etsi expressio ipsa impossibilitatem mentiatur. Binomialis verò $\frac{61}{64}+\sqrt{\frac{-375}{4096}}$ Radix quintana est $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{-15}$, & Binomialis $\frac{61}{64}-\sqrt{\frac{-375}{4096}}$ Radix itidem quintana est $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{-15}$, quorum Binomialium semisumma $= \frac{1}{4} = y$.

Si autem extractio ista vel non peragi posset, vel etiam difficilior videretur, res ubique confici potest per Tabulam sinuum naturalium ad modum sequentem.

Ad

Ad Radium 1 sit $a = \frac{61}{64} = 0.95112$ sinus arcûs cujusdam, qui proinde erit 72°: 23° cujus pars quinta (eo quod $n = 5$) est 14°: 28°; hujus sinus 0.24981 = ¼ proximè. Nec secus procedendum in Æquationibus graduum superiorum.



DE CONSTRUCTIONE PROBLEMATUM

Solidorum, sive Æquationum tertiæ vel quartæ potestatis, unicâ datâ Parabola ac Circulo efficienda; dissertatiuncula.

Authore EDM. HALLEY.

Quo pacto æquationes omnes Cubum vel Quadrato-quadratum quantitatis incognitæ involventes, ope Parabolæ cujuscunque datæ & Circuli, construi possint, clarè tradit ac liquide demonstrat præclarus ille *Cartesius* in Lib. III. Geometriæ suæ: Sed primum jubet secundum æquationis terminum, si adfuerit, tollere, ac deinde reductæ æquationis Radices regulâ ibidem expositâ elicere. Cum verò operatio ista nimis laboriosa videatur, nonnullis visum est constructionem similem etiam absque ullâ prævia reductione comminisci; inter quos *Franciscus* a *Schooten* Methodum valde facilem ac simplicissimam pro construendis Cubicis quomodolibet affectis prodidisset, si modò, exposito principio unde regulam derivavit, Lectoris memoriæ, quam plurimis ac intricatis cautionibus obruit, melius studuisset. Nuper verò Vir Cl. D. *Thomas Baker* nostras, integro libello de constructionibus hisce conscripto, non solùm Cubicas, sed etiam Biquadraticas omnes cujuscunque generis unicâ generali regulâ complexus est, eamque demonstrationibus ac Exemplis per omnes casus abundè satis illustravit; nec non sub finem modum proponit unde regula ista generalis investigari possit: Haud tamen illum ipsum ostendit, cujus ope (uti suspicor) Clavem suam Geometricam Catholicam obtinuit, vel saltem multò faciliùs obtinere potuit. Cumque perplexis cautionibus de signis + & — Regula hæc D. *Bakeri* non minùs obnoxia fuit quàm illa *Schooteni*, ut vix absente libro constructiones illas quis tutò peragat; haud injucundum nec Tyronibus incommodum fore visum est, utriusque fundamentum ex-

po-

ponere, ac simul, emendatâ Methodo, in re tam difficili, lucem quantum valeam afferre.

Constructio quam tradit *Cartesius*, quæque facillimè radices æquationum omnium Cubicarum vel Biquadraticarum, ubi deficit secundus terminus eruit, ut nota supponi potest; attamen cùm cardo sit à quo subsequentia pendent, ne dissertatiuncula hæc capite truncata videatur, ex illius Geometriâ desumptam placuit Regulam adjungere, pauculis nonnullis in melius uti reor transpositis.

Deficiente secundo termino omnes æquationes Cubicæ reducuntur ad hanc formam $z^3 * . apz . aaq = o$, ac Biquadraticæ ad hanc $z^4 . * . apzz . aaqz . a^3 r = o$. (ubi a designat Latus rectum Parabolæ cujusvis datæ, quam in Constructione adhibere licet,) vel sumendo a pro Unitate, ad hanc $z^3 * . pz . q = o$, vel ad hanc $z^4 * . pzz . qz . r = o$.

Jam data Parabola FAG cujus Axis sit ACDKL ac latus re- TAB. XII. fig. 3.
ctum a vel 1, fiat AC ejus dimidium, ac collocetur semper à vertice A versus interiora figuræ: dein sumatur CD $= \frac{1}{2} p$ in lineâ illâ AC continuata versus C si in æquatione fuerit $- p$, vel versus alteram partem si habeatur $+ p$. Porrò è puncto D, aut ex puncto C si non habeatur quantitas p, erigenda est ad axem perpendicularis DE æqualis $\frac{1}{2} q$, dextrorsum quidem si fuerit $- q$, ad alterum verò axis latus si fuerit $+ q$; ac Circulus centro E radio AE descriptus, si æquatio fuerit tantùm Cubica, Parabolam tot punctis F & G intersecabit quot veras habet Radices, quarum quidem affirmativæ ut GK erunt ad dextram Axis partem, negativæ ut FL ad sinistram.

At si Æquatio Biquadratica fuerit, augeri vel minui debet Circuli Radius AE, addendo, si fuerit $- r$, vel subducendo, si sit $+ r$, ex ejus quadrato rectangulum ar, seu contentum sub Latere recto & quantitate data r; id quod nullo ferè negotio efficitur Geometricè. Hujus verò Circuli intersectiones cum Parabola omnes veras Biquadraticæ Æquationis radices dimissis ad Axem perpendiculis exhibebunt; Affirmativas quidem ad dextram Axis; Negativas verò ad sinistram. Totius demonstrationem *Cartesio* ejus inventori relinquo.

Notandum hic me operam dare ut semper habeantur Radices affirmativæ ad dextram Axis Latus, ut evitetur confusio à pluribus cautionibus, quarum causa minimè evidens est, necessariò oritura.

His præmissis, ut aditus pateat ad constructionem etiam earum æquationum ubi reperitur terminus secundus, consideranda venit Regula pro tollendo termino secundo, ac reducendâ æquatione ad aliam, quæ Methodo præcedente construi possit. Omnes verò hujus Classis æquationes cubicæ ad hanc formam $z^3.\, bzz.\, apz.\, aaq = o$, vel ad hanc $z^3.\, bzz.\, *.\, aaq = o$; Biquadraticæ verò ad hanc $z^4.\, bz^3.\, apzz.\, aaqz.\, a^3 r = o$, vel hanc $z^4.\, bz^3.\, *.\, aaqz.\, a^3 r = o$, vel $z^4.\, bz^3.\, apzz.\, *.\, a^3 r = o$ vel denique ad hanc $z^4.\, bz^3.\, *.\, *.\, a^3 r = o$ reduci possunt: è quibus omnibus, prout signis + & — diversimodè connectantur, ingens oritur varietas, unde Regula generalis omnibus inserviens obscura ac maximè difficilis redditur, nisi methodo quam subjungimus illustrata nodisque extricata tractetur.

Tollitur in Biquadraticis secundus terminus, ponendo $x = z + \frac{1}{4}b$, si fuerit $+ b$ in æquatione vel $x = z - \frac{1}{4}b$ si fuerit $- b$: hinc $x - \frac{1}{4}b$ in primo casu, & $+ \frac{1}{4}b$ in altero æquatur z; & in æquatione quâvis proposita, substituta loco z quantitate æqualis prodebit nova æquatiò termino secundo carens, cujus radices omnes x data differentia $\frac{1}{4}b$ vel excedunt vel deficiunt à radice quæsita z: Cùm verò in rebus istiusmodi plus exempla quàm præcepta valere solent, proponatur una vel altera æquatio Construenda.

Exemplum I.

$z^4 + bz^3 - apzz - aaqz + aaar = o.$

Sit $x - \frac{1}{4}b = z$ Et erit

$xx - \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}bb = zz$

$xxx - \frac{3}{4}xxb + \frac{3}{16}xbb - \frac{1}{64}bbb = z^3$

& $x^4 - bx^3 + \frac{3}{8}bbxx - \frac{1}{16}b^3 x + \frac{1}{256}b^4 = z^4.$

hinc

hinc

$$x^4 - bx^3 + \tfrac{3}{8}bbxx - \tfrac{1}{16}bbbx + \tfrac{1}{256}b^4 = z^4$$
$$+ bx^3 - \tfrac{3}{4}bbxx + \tfrac{3}{16}bbbx - \tfrac{3}{64}b^4 = + bz^3$$
$$- apxx + \tfrac{1}{2}apbx - \tfrac{1}{16}apbb = - apzz$$
$$- aaqx + \tfrac{1}{4}aaqb = - aaqz$$
$$+ aaar$$

Harum omnium ſumma fit æquatio nova ſecundo termino carens, quæque proinde juxta regulam Carteſianam conſtrui poſſit, ſumendo loco $\frac{1}{2}p$ dimidium coefficientis termini tertii per a ſive Latus rectum diviſi, hoc eſt $-\frac{3bb}{16a} - \frac{1}{2}p$; ac Loco $\frac{1}{2}q$, dimidium coefficientis termini quarti per aa diviſi, ſive $+\frac{bbb}{16aa} + \frac{pb}{4a} - \frac{1}{2}q$. Cujus partes ſigno + notatæ ſiniſtrorſum ab Axe, ſigno — notatæ dextrorſum collocandæ ſunt, ut habeatur centrum Circuli ad conſtructionem requiſiti, ac cujus interſectiones cum Parabola, dimiſſis in axem perpendiculis, radices omnes veras x deſignent, affirmativas quidem ad dextram axis, negativas verò ad ſiniſtram. Cùm verò $x - \frac{1}{4}b = z$, ducendo lineam Axi parallelam, ad dextrum ejus latus & ad diſtantiam $\frac{1}{4}b$, perpendicula illa ad hanc parallelam terminata deſignabunt omnes radices quæſitas z, affirmativas ad dextram, negativas verò ad ſiniſtram. Radium circuli quod attinet, habetur ille addendo partes negativas ac auferendo partes affirmativas termini quinti per aa diviſi, e quadrato lineæ AE, à centro invento E ad Verticem Parabolæ A ductæ: id quod maxima ex parte efficitur capiendo, loco lineæ AE, lineam, quæ ad interſectionem Parabolæ ac parallelæ prædictæ terminatur; ejus enim quadratum omnes termini quinti partes ex ablatione termini ſecundi æquationi novæ ingeſtas complectitur (uti facilè probabitur:) ac reſtat ſolummodò ut hujus lineæ quadratum augeatur, ſi in æquatione habeatur $- r$, vel minuatur ſi ſit $+ r$, additione vel ſubductione rectanguli ar, unde conflatur quadratum Radii Circuli quæſiti.

Hæc eſt Methodus inveſtigandi regulam centralem Dni *Bakeri* omni-

mnibus cautionibus libera ac ſatis facilis; ac ſola differentia ex eo provenit, quod ego juxta Axem, ille verò juxta Axi parallelam circuli ejuſdem centrum determinat: quodque ego ſemper radices affirmativas ex Axis dextro latere invenio, quas ille nunc dextro nunc ſiniſtro conſtituit.

Æquationes Cubicas quod attinet, eæ reduci debent ad Biquadraticas, antequàm eâdem Regulâ generali conſtrui poſſint; id quod fit ducendo æquationem propoſitam in radicem ſuam z, unde provenit æquatio Biquadratica in quâ deficit terminus ultimus ſive r: quapropter ſublato ſecundo termino & invento centro E, circulus ducendus eſt per ipſam interſectionem Parabolæ & parallelæ ad Axem ſuperius memoratæ; cùm ſcilicet ar fit o, & in nova æquatione totus terminus quintus ex ipſâ ablatione termini ſecundi oriatur. Conſtruenda ſit hæc æquatio.

Exemplum II.

$z^3 - bzz + apz + aaq = 0$: Quæ ducta in z fit

$z^4 - bz^3 + apzz + aaqz = 0$,

Ad tollendum ſecundum terminum ponatur $x + \frac{1}{4}b = z$, & fiet

$$x^4 + bx^3 + \tfrac{3}{8}bbxx + \tfrac{1}{16}b^3x + \tfrac{1}{256}b^4 = +z^4$$
$$-bx^3 - \tfrac{3}{4}bbxx - \tfrac{3}{16}b^3x - \tfrac{1}{64}b^4 = -z^3$$
$$+apxx + \tfrac{1}{2}abpx + \tfrac{1}{16}apbb = +apzz$$
$$+aaqx + \tfrac{1}{4}aaqb = +aaqz$$

In hac nova Æquatione, tertii termini ſemicoefficiens per a diviſa, viz. $-\frac{3bb}{16a} + \frac{1}{2}p$, loco $\frac{1}{2}p$ uſurpanda eſt; ac coefficientis termini quarti dimidium, diviſum per aa Lateris recti quadratum, viz. $-\frac{bbb}{16aa} + \frac{pb}{4a} + \frac{1}{2}q$, vicem ipſius $\frac{1}{2}q$ in conſtructione *Carteſii* ſubit; unde centrum E determinatur. Deinde ducta Axi parallela ad diſtantiam $\frac{1}{4}b$ ad ſiniſtrum ejus latus ($obx + \frac{1}{4}b = z$) cujus interſectio cum Parabola ſit O; circulus centro E, Radio EO deſcriptus Parabolam ſecet vel tanget in tot punctis quot æquatio veras habet radices: quæ quidem radices ſeu z ſunt perpendicula de pun-

punctis illis in Axi parallelam demissa, ad dextram quidem affirmativæ, negativæ ad sinistram.

Si in æquatione defuerit terminus tertius vel quartus vel uterque, in investiganda regula centrali nulla omninò observanda est Methodi differentia, sed deficiente quantitate p vel q, deerunt partes illæ linearum CD ac DE ex quantitate illa aliquo modo deductæ, ac procedendum est cum reliquis coefficientibus termini tertii & quarti in æquatione novâ, sicut in præmissis exemplis præscriptum est.

Hactenus Cl. *Bakeri* methodum generalem pertractavimus, qua quidem nulla alia facilior ac paratior expectanda est, assumpta ad constructionem sive Parabola, sive alia quævis linea curva, cùm scilicet æquatio ad Biquadraticam ascendit. Etenim dum hæc scribo mihi occurrit regulæ centralis Effectio Geometrica præter omnem spem expedita, ac harum rerum Curiosis abundè satisfactura.

Descripta Parabola NAM, cujus vertex A, Axis ABC ac latus rectum a, reducatur æquatio ad hanc formam $z^4 . bz^3 . apzz . aaqz . a^3 r . = 0$ vel ad hanc $z^3 . bzz . apz . aaq = 0$ si cubica tantùm fuerit: dein ad distantiam BD $= \frac{1}{2} b$ ducatur linea DH Axi parallela, ad sinistram quidem si fuerit $- b$, ad dextram si $+ b$, parabolæ occurrens in puncto D; de quo dimittatur perpendiculum in axem BD. In linea AB continuata versus B fiat BK $= \frac{1}{2} a$, & ducatur linea DK utrinque interminata. Porrò sit KC $= 2$ AB in Axe semper ultra K continuato; ac si habeatur quantitas p signo $-$ affecta, versus easdem partes etiam sumatur CE $= \frac{1}{2} p$, vel in contrarias, si habeatur $+ p$, ac e puncto E erigatur Axi perpendiculum EF (vel e puncto C si defuerit quantitas p) lineæ DK, si opus est continuatæ, occurrens in puncto F; quod quidem circuli requisiti centrum est, si defuerit quantitas q; Ast si habeatur q, sumenda est in FE, si opus est continuata, linea FG $= \frac{1}{2} q$, sinistrorsum quidem si fuerit $+ q$, dextrorsum si $- q$ collocanda: Et punctum G erit centrum circuli ad constructionem propositam idonei, ejusque Radius, si defuerit quantitas r, hoc est si tantùm cubica fuerit, erit linea GD; cujus quadratum in Biquadraticis augen- TAB. XII. Fig. 4.

dum eſt, ſi fuerit $-r$, vel minuendum ſi $+r$ additione vel ſubductione rectanguli ſub r & latere recto. Deſcripto ſic circulo, ab interſectionibus ejus cum Parabola demiſſis in lineam D H perpendiculis, quæ ad ſiniſtram ſunt, ut N O, radices æquationis negativas ſemper deſignant, quæ ad dextram ut M L, affirmativas.

Aliter ac paulò ſimpliciùs Æquationes cubicæ juxta *Schooteni* Regulam conſtruuntur, quaque etiam radices ad Axem referuntur: quoniam verò ipſe inventor nec modum inveniendi nec demonſtrationem inventi exponit, non abs re erit ejusdem fundamentum hic adjicere, ſimulatque Effectionem Geometricam concinniorem reddere, atque cautionibus quibus implicatur extricare.

Hæc Regula derivatur ex eo quod omnis æquatio Cubica reduci poſſit ad Biquadraticam, in quâ deficiet terminus ſecundus: Hoc fit ducendo æquationem propoſitam in $z - b = o$, ſi fuerit $+b$ in æquatione, vel in $z + b = o$. Si fuerit $-b$; & æquatio nova producta easdem habebit radices cum Cubica, atque inſuper alteram ipſi $-b$ æqualem, ſi fuerit $-b$ in æquatione; vel contra.

Proponatur conſtruenda $z^3 - z^2 b + apz + aaq = o$.

Hæc ducta in $z + b$ fit $\begin{aligned} z^4 - z^3 b + apz^2 + aaqz \\ + z^3 b - bbzz + abpz + aaqb. \end{aligned}$

Hic deficit ſecundus terminus, ac cœfficiens tertii $-bb + ap$

Fig. 3. dat $-\frac{bb}{2a} + \frac{1}{2}p$ loco $\frac{1}{2}p$ vel C D in Conſtructione *Carteſii*, & ex dimidio cœfficientis termini quarti fit $+\frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$ loco $\frac{1}{2}q$ vel D E uſurpanda; adeòque determinatur centrum circuli quæſiti: atque ob datam unam ex radicibus æquationis novæ, viz. $-$ vel $+b$, dabitur etiam punctum in circumferentia, id eſt Radius ejus. Denique deſcripto circulo, ab interſectionibus ejus cum Parabola demiſſa in Axem perpendicula æquationis radices exhibebunt, affirmativas & negativas, eadem lege ac ſupra.

Tab. XIII. Fig. 1. Inveſtigatur autem centrum Circuli conſtructione per quam facili, cæteriſque omnibus in Cubicis præferenda. Deſcriptæ Parabolæ A M D ſit vertex A, atque Axis A F: ad diſtantiam ipſi b æqualem

lem ducatur Axi parallela DK, ad dextram si fuerit $+b$ in æquatione, ad sinistram si $-b$, quæ Parabolæ occurrat in puncto D. Centris D & A describantur radiis æqualibus arcus occulti utrinque sese intersecantes, ac per sectionum puncta ducatur linea interminata BC, quæ medio lineæ suppositæ AD perpendiculariter insistat, & Axi occurrat in puncto E. AbE, infernè quidem si in æquatione habeatur $-p$, vel supernè versus A si fuerit $+p$, ponatur EF$=\frac{1}{2}p$; & ex F (vel ex E si defuerit p) educatur perpendiculum FG, lineæ BC occurrens in puncto G; & in GF producta fiat GH$=\frac{1}{2}q$, dextrorsum quidem si in æquatione habeatur $-q$, aliter sinistrorsum, applicanda: ac punctum H erit centrum quæsitum, HD vero circuli Radius, qui demissis in axem perpendiculis ab intersectionibus suis cum Parabola, ut LM, Radices omnes, ut prius, commonstrabit. Quomodò verò constructio hæc ex præmissis consequatur, per se satis evidens est, nec opus est ut in eâdem demonstrandâ diutiùs immorer.

Ne in his edendis frustraneam navasse operam, & ex aliorum inventis gloriolam captare videar, consulat Lector Cl. *Bakeri* librum Annô 1684. *Londini* editum, & quæ de hoc argumento scripsit à *Schooten* in commentario suo in Librum III. Geometriæ Cartesianæ. Brevi concesso otio tractatulum alium de numero Radicum in hujusmodi Æquationibus, earumque limitibus, ex contemplatione Constructionum præcedentium, aggredi ac in lucem proferre statuo.



DE NUMERO RADICUM

In Æquationibus Solidis ac Biquadraticis, sive tertiæ ac quartæ potestatis, earumque limitibus, tractatulus

Authore E. HALLEY.

Cùm in tractatulo, quem nuper publici juris feci in actis Philosophicis, Num. 188; Methodum aperuissem, qua Problemata solida utcunque affecta minimo negotio, unicâ datâ Parabolâ & Circulo, simplicissimè construi possint; sub finem mihi sese obtulit contemplatio jucunda satis, nempe ex his Constructionibus Numerum Radicum in quâvis Æquatione, earumque Limites ac signa facilè consequi ac determinari: quocirca fidem dedi me brevi de hâc materiâ dissertatiunculam aliquam scripturum, in quâ si non Principibus, saltem secundæ classis Geometris, me non ingratum nec inutile præstiturum omninò persuasum habui.

Propiùs verò inspicienti mihi compertum est, me imprudentem inter ardua Geometrica illapsum, ac jam iis tractandis designatum, quibus olim laboravêre Viri illustres *Harriottus* nostras, ac *Cartesius*; in quibus pari fato utrique Paralogismum, (forsan in eorum scriptis Geometricis unicum) diversô tamen modô, admisêre; uti posthâc probabitur: sed *Quandoque bonus dormitat.* Quapropter agnitâ rei tum difficultate tum præstantiâ, totis viribus incumbere statui, ne promissis exequendis impar crederer, ac ne Geometriæ pars tam eximia, támque parùm culta, diutiùs tenebris involuta lateret; sed ope nostrâ lucidè his paucis exposita daretur.

Imprimis verò Lectorem monitum velim, quòd dum his legendis operam dat, oportet prædictam dissertationem Num. 188. editam, ad manum habere, ac Constructiones ibidem traditas probè callere; quia quæ sequuntur ab illis maximâ ex parte pendent, quas tamen hic repetere vix integrum esset.

Ex

Ex *Cartesio* & ex ibi dictis constat, tam in Cubicis, quàm in Biquadraticis æquationibus, radices exponi posse demittendo perpendicula in Axem, datamve diametrum Parabolæ datæ, ab intersectionibus Curvæ illius cum Circulo. Cumque Circulus Parabolam secans, vel in quatuor vel duobus punctis eam intersecare necesse est, constat in Biquadraticis vel duas vel quatuor Radices veras, Affirmativas vel Negativas, semper haberi; uti etiam si fortè Circulus illam tangat, quô in casû æqualitas duarum Radicum ejusdem signi concluditur. In Cubicis autem, quoniam una ex intersectionibus ad Constructionem requiritur, non nisi una vel tres reliquæ Radices designant unam vel tres; uti in Casu contactus, unde constat duas æquales reperiri Radices, Problemáque unde resultat æquatio reverà planum esse.

Cubicæ itaque omnes quomodocunque affectæ unâ vel triplici Radice explicabiles sunt, utique semper possibiles, nempe si Radices negativas pro veris admiseris: si Biquadraticæ, quarum terminus ultimus r signo — affectus est, duabus vel quatuor. Ast si habeatur $+ r$ in æquatione, eáque tanta sit, ut $\sqrt{GDq - ar}$, minor sit quàm ut Circulus, eo radio ac centro G descriptus, Parabolam contingere in aliquo puncto possit, æquatio data omninò impossibilis est, nec ullâ Radice Negativâ vel Affirmativâ explicabilis: Sed de his plura in sequentibus. TAB. XII. Fig. 4.

Quoniam verò tanta intercedit differentia inter Casus Cubicarum & Biquadraticarum, ut simul comprehendi nequeant; primùm Cubicas deinde alteras tractabimus. Cubicæ verò infinitis Circulis in datâ parabolâ construuntur, Biquadraticæ autem unicô tantùm (saltem his Methodis): id adeò quia ponendo $z - e$, sive indeterminata aliqua, æqualem nihilo, æquatio Cubica reducitur ad Biquadraticam easdem Radices cum Cubicâ habentem, atque insuper aliam ipsi e æqualem; unde fit ut tot Circulis diversis construi possit Cubica, quot imaginari velis quantitates e, id est infinitis. Inter has vero Constructiones, illa quam superius (§. ult.) dedi longè facillima est. Huic tamen non multum cedit alia, quæ ad enucleationem Numeri Radicum, earumque Limitum magis accommodata videtur, quæque ortum trahit ex ablatione secundi termini, ponendo

 modo

modo vulgari $x = z +$ vel $-$ tertiâ parte coefficientis termini secundi. Hæc autem est. Data Parabola ABY ejusque vertice A, Axe AE & latere recto a, reducatur æquatio ad formam consuetam, viz. $z^3.\, bz^2.\, apz.\, aaq \doteq 0.$ Deinde ad distantiam $\frac{1}{2}b$ ducatur Axi parallela BK, dextrorsum quidem si fuerit $+b$, aliter sinistrorsum; Parabolæ occurrens in B; ac lineæ suppositæ AB erigatur perpendicularis utrinque interminata DP, Axi occurrens in puncto G. De B in Axem demitte perpendiculum BC, & ipsi AC fiat GE semper æqualis, ac versus inferiora ponatur. Ab E fiat EH $= \frac{1}{2}p$, sursum quidem, si in æquatione fuerit $+p$, deorsum verò si $-p$, ac è puncto H (vel ex E si defuerit quantitas p) educatur perpendiculum HQ interminatæ DP occurrens in puncto O. Denique in linea HQ interminata, fiat OR $= \frac{1}{2}q$, ab O dextrorsum si fuerit $-q$, sinistrorsum si $+q$, collocanda: ac Circulus centro R, radio RA descriptus, tot punctis secabit Parabolam, quot æquatio proposita veras habet Radices; eæque erunt perpendicula ZY à punctis intersectionem Y in Axi parallelam BR demissa; quarum quæ ad dextram lineæ BK Affirmativæ sunt, ad sinistram Negativæ.

TAB. XIII. Fig. 2.

Hujus constructionis commoditas in eo consistit, quod Circulo per verticem transeunte peragitur, perinde ac si defuisset secundus terminus; ideòque ad Radicum numerum determinandum, sufficit Loci sive Lineæ Curvæ proprietates perspectas habere, quæ spatia discriminat, ubi si ponatur Centrum Circuli qui per Parabolæ verticem transeat, circumferentia ejus vel uno vel tribus aliis punctis eam secabit; hoc est Lineæ curvæ, in quam incidunt centra omnium Circulorum per verticem transeuntium ac deinde Parabolam tangentium, naturam definire.

Locus autem ille est Parabolois, quam cum *Cl. Wallisio* semicubicalem appellare licet, sive in quâ Cubi applicatarum ad Axem sunt inter se ut Quadrata portionum Axis. Cujus Latus rectum est, $\frac{1}{27}$ Lateris Recti datæ Parabolæ, Vertex verò punctum V existente AV dimidium lateris recti ejusdem Parabolæ. Hoc est, si ponatur Unitas pro Latere Recto datæ Parabolæ, $\frac{1}{27}$, cubi ordinatim applicatæ æquabuntur Quadrato partis diametri, sive cubus ex $\frac{1}{2}$ VH qua-

quadrato ex HR, si scilicet R sit Centrum Circuli qui per verticem Parabolæ transeat, eamque deinde contingat; Hæc est Curva illa quam primus mortalium *Nelius* Nostras rectæ datæ æqualem demonstravit, eâque occasione apud Principes Geometras dudum celebris; ejusque proprietates *Cl. Wallisius* sub finem libri *de Cissoide*, *& Hugenius Prop.* 8. & 9. *de Linearum Curvarum Evolutione*, aliique acri ingenio disquisivêre, quorum scripta consulat Lector. Hæc Curva utrinque ab Axe Parabolæ descripta, viz. VNL, VPX spatium complectitur, in quo si ponatur Centrum Circuli, qui per verticem A transeat, intersecabit ille Parabolam in tribus aliis punctis; spatia verò ab Axe remotiora Centra præbent Circulis non nisi uno præter verticem puncto Parabolam secantibus.

His probè intellectis jam ad determinandum Radicum Numerum accingimur: Ac primùm deficiat secundus terminus; sitque Latus Rectum 1, vel AV = $\frac{1}{2}$; in constructione VH est $\frac{1}{2}p$, HR verò $\frac{1}{2}q$; cumque si fuerit $+ p$, ab V versus superiora ponenda sit $\frac{1}{2}p$, Centrum Circuli extra spatium LVX semper constituitur; ideòque una tantùm Radice explicabilis est, Affirmativa si $- q$, Negativa si $+ q$: quæ quidem Radices *Cardani* Regulis investigantur. Si verò fuerit $- p$, VH = $\frac{1}{2}p$ infernè ponitur, ac fieri potest ut HR cadat inter Axem & Curvam VX vel VL, si scilicet Cubus ex $\frac{2}{3}$ VH, sive ex $\frac{1}{3}p$, major sit quàm quadratum ex $\frac{1}{2}q$, sive $\frac{1}{27}p^3$ major quàm $\frac{1}{4}qq$, quo in casu tres dantur Radices, duæ Negativæ, si fuerit $- q$, ac una Affirmativa earum summæ æqualis; vel si $+ q$, duæ Affirmativæ unáque Negativa. Quod si $\frac{1}{27}p^3$ minor sit quàm $\frac{1}{4}qq$ una tantùm reperitur Radix, Affirmativa si $- q$, Negativa si $+ q$. Atque hæc passim docentur ab iis qui hanc Geometriæ partem tractarunt.

Jam adsint omnes termini, ac primùm poponatur, e. g. æquatio hæc $z^3 - z^2 b + zp - q = 0$; cui etiam Figuram 2. adaptavimus. In cujus constructione BC = $\frac{1}{3}b$, VG = $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{18}bb$, VE $\frac{1}{6}bb$, VH $\frac{1}{6}bb - \frac{1}{2}p$, GH $\frac{1}{9}bb - \frac{1}{2}p$ vel $\frac{1}{2}p - \frac{1}{9}bb$, hinc HO = $\frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{6}bp$, vel $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3$, atque HR, sive distantia Centri Circuli R ab Axe, est semper differentia inter $\frac{1}{6}bp$ & $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$; quæ si æquantur, Centrum cadit in Axe; si $\frac{1}{6}bp$ major sit

ſit quam $\frac{2}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ ad ſiniſtram Axis, ſin minor ad Dextram. Si itaque Cubi ex $\frac{1}{3}$ VH, (hoc eſt ex $\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p$ quam nominemus d) Latus Quadratum ſive $\sqrt{ddd}$, majus ſit quàm HR, ſive differentia inter $\frac{2}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ & $\frac{1}{6}bp$; reperitur Centrum R intra ſpatium NPV, Paraboloidibus VPX, VNL, ac recta interminata DNP, circumſcriptum: ac proinde Circulus Parabolam ſecabit in tribus punctis Y, Y, Y, ad dextram lineæ BK ſitis, atque adeò æquatio tres habet Radices Affirmativas. Centro verò extra hoc ſpatium NVP conſtituto, non niſi unâ Radice Affirmativâ explicari poteſt. Hic obiter notandum Rectam DP Paraboloidem VPX tangere in puncto P, exiſtente EP $= \frac{2}{27}b^3$; alteram verò VNL ſecare in puncto N, ita ut demiſſo in Axem perpendiculo NF, VF ſit pars quarta ipſius EV, ſive $\frac{4}{9}bb$, NF verò $\frac{1}{108}b^3$. VW autem, quæ è puncto V Axi perpendiculariter erectâ lineæ DP occurrit in W, æqualis eſt $\frac{1}{54}b^3$ ſive $\frac{1}{4}$EP.

Hinc tutò concluditur, ſi in æquatione vel p major ſit quàm $\frac{1}{3}bb$, vel q major quàm $\frac{4}{27}b^3$, non niſi unam eámque Affirmativam Radicem reperiri; Fallit itaque Regula *Carteſii* (Edit. *Amſt.* 1659. pag. 70.) ubi tot veras dari Radices quot ſunt in æquatione mutationes ſignorum + & — pronunciat, fruſtra etiam in Commentariis ſuis Sphalma hoc excuſante *Schootenio*; Fingi enim poſſunt infinitè plures æquationes præcedentis formulæ tres ſignorum mutationes habentis, quæ unam tantùm quam quæ tres habeant Radices. *Propoſitio etiam quinta ſectionis quintæ Artis Analyticæ Harriotti Noſtri*, uti *Prob.* 18. *Numeroſæ Poteſt. Reſol. Vietæ*, vix ſatis firma eſt, cùm ex Limitationibus quas ibi poſuerunt, toti Parallelogrammo PIVW id conveniat, quod ſoli ſpatio NVP jam competere probavimus, hoc eſt ut centrum præbeat Circulo tribus aliis punctis præter Verticem Parabolam ſecante.

Quantitas autem q, ſive terminus ultimus, datis, b & p eâ lege ut p minor ſit quàm $\frac{1}{3}bb$, accuratè limitatur ex præcedente æquatione $\sqrt{ddd} = \overline{\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q} \backsim \frac{1}{6}bp$; cùm ſcilicet Circulus Parabolam contingat. Itaque $\frac{1}{2}q$ minor eſſe debet quàm $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3 + \sqrt{ddd}$; at ſi p major fuerit quàm $\frac{1}{4}bb$, majorem etiam eſſe oportet $\frac{1}{2}q$ quam $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3 - \sqrt{d^3}$, ne cadat centrum in ſpatiolo NVW. Atque

que his conditionibus æquatio ſemper triplici Radice explicabilis erit, aliter non niſi una. Semper verò, ſive tres ſive una, Affirmativæ ſunt, ob poſitionem centri R, ad dextram lineæ DP.

Atque hic eſt caſus maximè difficilis, ita ut quicunque præmiſſa bene calleat ſequentia facili negotio intelliget. Detur jam æquatio $z^3 - bz^2 + pz + q = 0$. Hic ut tres habeantur Radices, oportet centrum Circuli alicubi intra ſpatium PN△, rectis PN, P△, & curva Paraboloidis N△, definitum, reperiri; quapropter cum EF ſit $= \frac{1}{3} bb$, p minor eſſe debet quam $\frac{1}{3} bb$: jam ad determinationem quantitatis q, exiſtente $d = \frac{1}{9} bb - \frac{1}{3} p$, ut antea, $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27} bbb - \frac{1}{6} bp$ ſemper major eſſe debet quam $\frac{1}{2} q$, ut conſtituatur Centrum Circuli in ſpatio prædicto PN△: quod cùm ſit æquatio talis duas habet Radices Affirmativas ac unam Negativam. Si verò p major eſt quàm $\frac{1}{3} bb$, vel $\frac{1}{2} q$ major quàm $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27} bbb - \frac{1}{6} bp$, non niſi una eaque Negativa Radice explicabilis eſt.

Proponatur jam æquatio $z^3 - bz^2 - pz - q = 0$. Ut hæc æquatio tres habeat Radices, oportet centrum Circuli alicubi inveniri in ſpatio indefinito, inter rectam DPD & curvam Paraboloidis PX; hic quantitas p non eſt obnoxia limitationibus, $\frac{1}{2} q$ verò ſemper minor eſſe debet quàm $\sqrt{ddd} - \frac{1}{27} bbb - \frac{1}{6} bp$, poſito $d = \frac{1}{9} bb + \frac{1}{3} p$: Hoc pacto duæ dantur Radices Negativæ, ac una Affirmativa, aliter verò ſi $\frac{1}{2} q$ major ſit quam $\sqrt{ddd} - \frac{1}{27} bbb - \frac{1}{6} bp$, poſito $d = \frac{1}{9} bb + \frac{1}{3} p$: unicâ tantùm Affirmativâ exponi poteſt. Quarto loco ſit æquatio $z^3 - bz^3 - pz + q = 0$, quæ duas Affirmativas habet Radices ac unam Negativam ſi Centrum Circuli reperiatur in ſpatio indefinito inter rectas P△, PD, ad curvam Paraboloidis △I; hoc eſt, (poſito $d = \frac{1}{9} bb + \frac{1}{3} p$) ſi $\frac{1}{2} q$ minor ſit quàm $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27} bbb + \frac{1}{6} bp$; ſi verò $\frac{1}{2} q$ major hâc quantitate fuerit, una tantum Negativa ineſt Radix.

Quatuor autem æquationes reliquæ, in quibus habetur $+b$, quoad limitationem Numeri Radicum non differunt à prædictis, ſi ſignum termini ultimi mutetur, ſervato ſigno termini tertii; quæ verò Affirmativæ erunt Radices in illis, hic fiunt Negativæ, & vice verſa.

Sic in æquatione, $z^3 - bz^2 + pz - q = o$, una vel tres erant Affirmativæ Radices; in hâc verò, $z^3 + bz^3 + pz + q = o$, vel una vel tres Negativæ ſunt, ſub iiſdem conditionibus; nulla verò omnino Affirmativa Sic in $z^3 + bz^2 + pz - q = o$, duæ ſunt Negativæ & una Affirmativa, ſi p minor ſit quam $\frac{1}{3}bb$, ac $\frac{1}{2}q$ minor quam $\sqrt{d^3} + \frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{6}bp$, quemadmodum in $z^3 - bz^2 + pz + q = o$; duæ erant Affirmativæ & una Negativa; excedentibus autem leges præſcriptas p vel q, una tantùm hic eſt Radix Affirmativa, quæ ibi Negativa erat. Pari modo in $z^3 + bz^2 - pz + q = o$, vel duæ ſunt Affirmativæ ac una Negativa, vel una Negativa tantum, denique iiſdem de cauſis in æquatione $z^3 + bz^2 - pz - q$ duæ ſunt Negativæ & una Affirmativa, vel una Affirmativa tantùm, quibus in æquatione $z^3 - bz^2 - pz + q$, duæ erant Affirmativæ & una Negativa, vel una Negativa tantùm, nempè prout $\frac{1}{2}q$ major vel minor fuerit quàm $\sqrt{d^3} + \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp$.

Si defuerit terminus tertius, ſive pz, Centrum R ſemper cadit in linea IPEΔ, quocircà ſi fuerit $z^3 - bz^2. *. - q$, vel $z^3 + bz^2. *. + q$, una tantùm eſſe poteſt Radix, ſi $-b$ Affirmativa, ſi $+b$ Negativa. At ſi fuerit $z^3 - bz^2. *. + q$, vel $z^3 + bz^2. *. - q$, duæ poſſunt eſſe Affirmativæ ac una Negativa in priore, vel una Affirmativa & duæ Negativæ in poſteriore, cadente Centro in linea PΔ inter P ac Δ, hoc eſt ſi $\frac{1}{2}q$ minor ſit quàm $\frac{1}{27}b^3$; Sin major fuerit, una tantùm Negativa in priore, vel una Affirmativa in poſteriore, dari poteſt.

Hactenus Numerum Radicum in Cubicis æquationibus pleniùs aſſequuti ſumus, reſtat ut nonnulla adjiciam de Quantitate Radicum, Hic primùm notandum quod omnis æquatio tres habens Radices ope Tabulæ Sinuum, Triſectione ſcilicet Anguli, ſatis expeditè reſolvi poſſit; Ponendo ſcil $\sqrt{\frac{4}{9}bb - \frac{4}{3}p}$, vel $\sqrt{4d}$, ſi fuerit $+p$ in æquatione, vel $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{3}p}$, ſi $-p$, pro Radio Circuli; Angulum verò triſecandum qui ſinum habeat in Tabula Sinuum $\frac{\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q}{\sqrt{d^3}}$. Invento hoc angulo, ſinus tertiæ partis ejus, ut

&

& Sinus tertiæ partis compl. ad Semicirculum, eorumque ſumma, ex Tabula Sinuum dabuntur. Hi verò Sinus in Radium $\sqrt{\frac{1}{3}bb+\frac{1}{3}p}$ ducendi ſunt, & habebuntur Quantitates (Y&, Y&, Y&, in Fig.) quarum & $\frac{1}{3}b$ vel ſumma vel differentia, prout caſus poſtulat, veras Radices Æquationis exhibebunt. Hæc omnia ex inventis *Carteſii* derivantur: Ut verò caſus omnes, quantum fieri poſſit, breviter complectar, dico quod Centro R, in prima æquationum formula, cadente in ſpatio VGP, Sectiones duæ Y, Y, cadunt inter A & B, ac proinde utraque ex Minoribus Radicibus Minor eſt quam $\frac{1}{3}b$, tertia autem & Major ſemper ſuperat $\frac{1}{3}b$, ſuperatur verò à b. Quòd ſi cadat in ſpatio GNV, duæ majores ſunt quam $\frac{1}{3}b$, minores verò quàm $\frac{1}{3}b$, tertia verò eſt b — duabus alteris, ac proinde minor quàm $\frac{1}{3}b$: Sed adhibitâ Limitatione Quantitatis p, arctioribus terminis Radices includuntur. Maxima enim Radix minor eſt quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb-\frac{1}{3}p}+\frac{1}{3}b$, major verò quàm $\sqrt{\frac{1}{4}bb-p}+\frac{1}{3}b$; at cùm $\frac{1}{4}bb$ minor eſt quàm p, limes ille fit $\sqrt{\frac{1}{9}bb-\frac{1}{3}p}+\frac{1}{3}b$; Radix media ſemper minor eſt quàm $\sqrt{\frac{1}{4}bb-p}+\frac{1}{3}b$; major verò quam $\frac{1}{3}b-\sqrt{\frac{1}{9}bb-\frac{1}{3}p}$; hunc verò limitem nunquam excedit Radix Minima, ſed cum Quantitate q evaneſcit.

In ſecunda formula præſcriptis Legibus duæ ſunt Affirmativæ ac una Negativa, ac cadente centro in ſpatio GPE, altera ex Affirmativis major eſt, altera minor quàm $\frac{1}{3}b$, Major verò non excedit b, Negativa autem Major non eſſe poteſt quam $\sqrt{\frac{1}{3}bb}-\frac{1}{3}b$, eſt autem differentia ipſius b & ſummæ Affirmativarum. Centro autem in ſpatio EGN△ poſito, utraque Affirmativa Major eſt quàm $\frac{1}{3}b$, minor verò quàm $\sqrt{\frac{1}{3}bb}+\frac{1}{3}b$, Negativa verò ſemper minor eſt quàm $\frac{1}{3}b$. Limites autem propiores ex data p evadunt. Radicis quidem maximæ Affirmativæ $\sqrt{\frac{1}{4}bb-p}+\frac{1}{2}b$, qua ſemper minor eſt, ut & major quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb-\frac{1}{3}p}+\frac{1}{3}b$; hoc tamen limite minor eſt altera Affirmativa, quæ cum quantitate q minuitur. Nega-

tiva verò ſemper minor eſt quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p} - \frac{1}{3}b$, ac deficiente quantitate q evaneſcit.

In tertiâ formulâ duæ Negativæ ſunt ac una Affirmativa: in hac, ut & in quarta, Radices non limitantur à quantitate b, Affirmativa verò ſemper minor eſt quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p} + \frac{1}{3}b$, major tamen quam $\sqrt{p + \frac{1}{4}bb} + \frac{1}{2}b$: Maxima verò ex Negativis ſemper major eſt quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p} - \frac{1}{3}b$, minor verò qu·m $\sqrt{p + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b$. Minor autem ex Negativis ſemper minuitur cum minuta quantitate q.

In quarta formula cadente Centro intra ſpatium L△PD; ſi duæ ſint Affirmativæ ac una Negativa, Maxima ex Affirmativis Major eſſe nequit quàm $\sqrt{p + \frac{1}{4}bb} + \frac{1}{2}b$, nec minor quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p} + \frac{1}{3}b$; Minor verò Radix ab hoc Limite minuitur, minuta quantitate q. Negativa autem minor eſt quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p} - \frac{1}{3}b$; major verò quàm $\sqrt{p + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b$.

Notandum verò hic Radices Negativas ubique ſigno Affirmativo notari, quia hæ ſunt Radices Affirmativæ quatuor æquationum illarum, in quibus habetur $+ b$, ac q ſigno contrario notatur; ut ſupra monui. Horum omnium demonſtratio ex eo conſequitur, quod ubicunque Centrum Circuli R incidit in lineas curvas VPX, vel V△L, circumferentia ejus Parabolam tangit in puncto, cujus diſtantia ab Axe eſt $\sqrt{\frac{1}{3}}$ VH, eámque ſecat ex alterâ Axis parte, ad diſtantiam $2\sqrt{\frac{1}{3}}$ VH; cùm verò Centrum cadit in Lineam DPD, altera ex Radicibus fit $= o$, ac proinde Cubica reducitur ad Quadraticam, ſive ad $z^2 - bz + p = o$, cujus Radices Limites deſignant ubi evaneſcit quantitas q: ac quo minor eſt q, eò propiùs ad has limites accedunt Radices. Quadratica eſt etiam cum Centrum cadit in Axe; hoc eſt, cùm $\frac{1}{2}q = \frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3$, in primâ formulâ; vel $\frac{1}{2}q = \frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{6}bp$. in ſecundâ; in tertiâ impoſſibile eſt; at in qvartâ cùm $\frac{1}{2}q = \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp$; quô in caſu minor ex Radicibus Affirmativis eſt $\frac{1}{3}b$, major $\sqrt{\frac{1}{3}bb + p} + \frac{1}{3}b$; Negativa verò

√

$\sqrt{\frac{1}{9}bb+p}-\frac{1}{3}b$. In primâ Radices sunt $\frac{1}{3}b$, & $\frac{1}{3}b\pm\sqrt{\frac{1}{9}bb-p}$. In secundâ verò formulâ, $\frac{1}{3}b$, & $\sqrt{\frac{1}{9}bb-p}+\frac{1}{3}b$, sunt Affirmativæ: Negativa autem $\sqrt{\frac{1}{9}bb-p}-\frac{1}{3}b$.

Atque hæc in Cubicis sufficere posse videntur; ob eximium verò Usum Methodi, quâ ope Tabulæ Sinuum Radices harum æquationum inveniuntur, placuit unum vel alterum Exemplum adjungere, ut Praxis illius compendium inde innotescat. Proponatur Æquatio tio $z^3-39z^2+479z-1881=0$; quæruntur Radices z. $\sqrt{\frac{1}{9}bb-\frac{1}{3}p}=\sqrt{9\frac{1}{3}}=\sqrt{d}$, cujus duplum $\sqrt{37\frac{1}{3}}$ Radius est Circuli; & $\frac{\frac{1}{27}b^3+\frac{1}{2}q-\frac{1}{6}bp}{\sqrt{d^3}}=\frac{2107+940\frac{1}{2}-3113\frac{1}{2}}{9\frac{1}{3}\sqrt{9\frac{1}{3}}}$, sive $\frac{24}{9\frac{1}{3}\sqrt{9\frac{1}{3}}}$ est sinus Tabularis Anguli, hoc est, facta divisione ope Logarithmorum, Log. 9,9251560, cui respòndet Angulus 57 *gr.* 19 *m.* 11 $\frac{1}{2}$ *s.* Hujus tertia pars 19 *gr.* 6 *m.* 24 *s.* & complementi 40 *gr.* 53 *m.* 36 *s.* sinus dant Log. 9.514983, & 9.816011, qui ducti in Rad. $\sqrt{37\frac{1}{3}}$ producunt Y &, & Y &, Log. 0.301030. = 2, & Log. 0.601059 = 4, tertia vero Y &, æqualis est eorum summæ sive 6. Ideòque Radices sunt $13-4=9$, $13-2=11$, & $13+6=19$, ex quibus singulis conflatur prædicta æquatio. Ubi Notandum duas Minores Radices non excedere $\frac{1}{3}b$ vel 13, quia centrum R in constructione cadit ad Dextram Axis, id est $\frac{1}{6}bp$ minor est quam $\frac{1}{27}b^3+\frac{1}{2}q$.

Exemplum alterum sit $x^3-15x^2-229x-525=0$, & quærantur Radices. $\sqrt{\frac{1}{9}bb+\frac{1}{3}p}=\sqrt{101\frac{1}{3}}=\sqrt{d}$, & Radius Circuli $\sqrt{405\frac{1}{3}}$. $\frac{\frac{1}{27}b^3+\frac{1}{6}bp+\frac{1}{2}q}{\sqrt{d^3}}=\frac{125+572\frac{1}{2}+262\frac{1}{2}}{101\frac{1}{3}\sqrt{101\frac{1}{3}}}=\frac{960}{101\frac{1}{3}\sqrt{101\frac{1}{3}}}=$ Sinui Tabulari Arcus, cujus Log. 9.9736426, & Arcus ipse 70 *gr.* 14 *m.* 22 *s.* hujus pars tertia est 23 *gr.* 24 *m.* 47$\frac{1}{3}$ *s.* & Complementi 36 *gr.* 35 *m.* 12$\frac{2}{3}$ *s*; quorum sinus Log. sunt 9.599183, & 9.775275, quibus addito Log. $\sqrt{405\frac{1}{3}}$ fiunt Log. 0.903089 = 8, & Log. 1.079181 = 12, & eorum summa = 20. Hinc concluditur $20+\frac{1}{3}b$, vel 25, æquari Radici Affirmativæ, &

8 & 12 — $\frac{1}{3}b$, sive 3 & 7, Negativis. Quod si æquatio fuisset $x^3 + 15x^2 - 229x + 525 = 0$, 3 & 7 fuissent Affirmativæ; 25 verò Negativa. Cæteræ autem Cubicæ unicâ tantùm Radice explicabiles juxta Regulas *Cardani* resolvendæ sunt, postquàm demptus fuerit secundus terminus; nec video quô pactô minori calculo hoc negotium peragi possit. At si desideretur Radix hæc in Quantitatibus b, p, q, expressa, dico eam esse in primâ formulâ, $\frac{1}{3}b$ + vel — Summa vel differentia Radicum Cubicacum ex $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{108}p^2b^2 + \frac{1}{27}b^3q - \frac{1}{6}bpq + \frac{1}{27}p^3} \pm \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{6}bp$: viz. +, si $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ major sit quàm $\frac{1}{6}bb$, aliter —; summa vero quoties $\frac{1}{3}bb$ major est quam p; sin minor fuerit $\frac{1}{3}bb$, differentia Inque cæteris formulis Radix semper conflatur ex iisdem elementis, variatis tamen signis + & —, ut facilè percipiet qui velit experiri.

Ope verò Tabulæ Logarithmicæ sinuum Versorum Radices hæ satis promptè inveniuntur; nempe si coefficientes Numeri sint surdi vel fracti, ac Radices Numeris ineffabiles; ut plerumque fit. Hæc autem est Regula: in primâ ac secundâ formulâ, si $\frac{1}{3}bb$ minor sit quàm p; sit $\frac{1}{3}p - \frac{1}{9}bb = d$, & posita differentia inter $\frac{1}{6}bp$ & $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$, hoc est HR, in prima, ac inter $\frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q$ & $\frac{1}{27}b^3$, in secundâ, pro Radio; inveniatur Angulus cujus Tangens est $d\sqrt{d}$. Deinde ut Co-Sinus hujus Anguli, ad ejusdem sinum versum: Ita differentia pro Radio habita, ad quartum; cujus Latus Cubicum trisecando Logarithmum habebitur: ac diviso $\frac{1}{3}p - \frac{1}{9}bb$ per hoc Latus Cub. è Quoto subducatur Divisor, Residuum erit quantitas Y &c: Hujus Residui ac $\frac{1}{3}b$ summa, si centrum cadit ad dextram Axis, aliter differentia earundem, Radix erit quæsita. Quod si $\frac{1}{3}bb$ major sit quàm p, posito HR pro Radio, sit $d\sqrt{d}$, sive distantia Paraboloidis ab Axe, sinus Arcus cujusdam; Hujus sinus versus ducatur in Radium, sive $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3 \pm \frac{1}{2}q$, ac trisecto producti Logarithmo, habebitur ejus Latus Cubicum, per quod dividatur $\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p$. Dico Quoti ac Divisoris summam eâdem Lege additam vel ablatam ex $\frac{1}{3}b$, Radicem quæsitam exhibere. Ac par est Ratio in tertiâ ac quartâ formulis, nisi quod $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp \pm \frac{1}{2}q$ pro Radio assumenda est, ac $\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$ in $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p}$ sive $d\sqrt{d}$ pro sinu: Sed hæc præcepta exemplis fortasse meliùs percipientur.

Sit

Sit æquatio Cubica, $zzz - 17zz + 54z - 350$, ac quæratur Radix z: Hic $\frac{1}{3}bb$ major est quàm p, sed q major est quàm Cubus ex $\frac{1}{3}b$, ideoque unâ tantùm Affirmativâ Radice explicabilis est. Jam $\frac{289}{9} - \frac{54}{3}$ est d, ac $\frac{127}{9}\sqrt{\frac{127}{9}}$ pro sinu habenda est, ad Radium $\frac{4913}{27} + 175 - 153$, hoc est $\frac{5507}{27}$: Arcus verò competens fit 15 *gr.* 3 *m.* 49 *s.* Hujus sinus versi Log. 8.5362376, additus Log. Radii 2.3095913, dat 0.8457889, cujus tertia pars 0.2819276 est Log. Radicis Cubicæ 1.91394, quo Divisore diviso, $\frac{127}{9}$ sive d, fit Quotus 7.37281; Quoti ac Divisoris summa, auctâ additione $\frac{1}{3}b$, fit Radix quæsita, nempe 14.9534, &c.

Exactis Cubicis Biquadraticas jam aggrediamur. Hæ semper vel nullam, vel duas, vel quatuor Radices veras habent, quarum determinatio, partim à Coefficientibus, partim à signo & magnitudine numeri absoluti dati, pendet. Harum omnium constructionem generalem superius (*pag.* 279.) satis concinnam posuidi, quam lector jam vidisse supponitur. In constructione æquationis $z^4 - bz^3 + pzz - qz + r = 0$, fit $BD = \frac{1}{4}b$, $AB = \frac{1}{16}bb$, $BK = \frac{1}{2}$, sive dimidio Lateris recti, $KC = 2AB = \frac{1}{8}bb$, $KE = \frac{3}{16}bb - \frac{1}{2}p$, $AE - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}bb - \frac{1}{2}p$, $FE = \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{4}bp$, ac $EG = \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{4}bp + \frac{1}{2}q$; quo factô Circulus, Centro G, Radio $\sqrt{GD^2 - r}$, intersecabit Parabolam vel nullo, duobus, aut quatuor punctis, quæ perpendiculis in lineam HD Radices omnes z exhibent. Ut autem quatuor sint, evidens est Centrum Circuli alicubi constitui debere intra spatium, de cujus puncto quôvis tria perpendicula in Curvam Parabolæ demitti possint; atque simul Radium minorem esse maximo ex illis perpendiculis majorem vero medio. Quòd si Centrum constituatur extra hoc spatium, ut non nisi una perpendicularis in Parabolam demitti possit, qua major sit Radius; vel si minor sit media ex tribus perpendicularibus, major verò quàm minima ex illis, duæ tantùm possunt esse Radices; nulla verò omninò datur, quoties Radius $\sqrt{GD^2 - r}$, minor est minima ex tribus, vel una illa, quoties TAB. XIII. Fig. 3.

ties una tantùm eſt. Jam quale ſpatium hoc ſit, quibusque limitibus diſcernitur, ac quibus conditionibus Radius Circuli minor vel major ſit prædictis perpendicularibus, nobis reſtat inquirendum; ac primùm quô pactô perpendicularis in Parabolam demitti poſſit oſtendendum eſt.

TAB. XIII. Fig. 4. Sit ABC Parabola, AE Axis ejus, AV ſemi Latus Rectum, G punctum de quô demittenda eſt perpendicularis. Ducatur Axi perpendicularis GE, ac biſecetur VE in F, & erecta perpendiculari FH ad idem Axis latus, fiat $FH = \frac{1}{4} GE$; dico quod Circulus, Centro H, Radio HA deſcriptus, Parabolam interſecabit in punctis tribus, vel uno, Z; ad quæ ductæ rectæ GZ curvæ Parabolicæ perpendiculariter inſiſtunt.

Fig. 2. Ut autem tres ſint hujusmodi interſectiones, oportet Centrum Circuli H ita collocari, ut ſit intra ſpatium Paraboloïdibus incluſum; hoc eſt ut FH minor ſit quàm $\sqrt{\frac{1}{27} VF^3}$, ſive FH^2 minus quàm cubus ex $\frac{1}{3} VF$: atque adcò $GE = 4 FG$, minor erit quam $4 \sqrt{\frac{1}{27} VF^3}$, ſive $4\sqrt{\frac{1}{216} VE^3}$, hoc eſt Quadratum ex GE minus erit quàm $\frac{2}{27} VE^3$. Coincidunt itaque hi Limites cum Paraboloïdibus duabus ejusdem generis cum iis quibus in Cubicis uſi ſumus, ſed quarum Latus Rectum duplo minor eſt; viz. $\frac{1}{16}$ Lateris Recti Parabolæ, hoc eſt $\frac{1}{8}$ ipſius AV: ideoque ea ipſa eſt linea Curva cujus Evolutione generatur Parabola, ſic demonſtrante *Hugenio*; quamque ſemper contingit linea

Fig. 3. DF, quæ Parabolæ perpendiculariter inſiſtit in puncto D. Punctum autem P, ſive in quo contingit recta DF Paraboloïdem, Centrum eſt Circuli, qui Radio DP deſcriptus cum Parabola in puncto D coincidit, ſive ejusdem Curvitatis eſt; ut per ſe ſatis conſtat.

Deſcriptis itaque hujusmodi Paraboloïdibus VXP, VNΔ, utrinque ab Axe; perſpicuum eſt quod, niſi Centrum Circuli conſtituatur intra hos limites, non poſſit ille pluribus quàm duobus in punctis Parabolam interſecare: unde determinare licet quibus ſub conditionibus Coefficientes terminorum intermediorum coercentur, in æquationibus Biquadraticis, ut habeantur quatuor Radices. Ac prima fronte clarum eſt p majorem eſſe non poſſe quàm $\frac{3}{8} bb$, (ſcil in formulis ubi habetur $+ p$) nec q quàm $\frac{1}{16} b^3$. Generaliter verò

rò $\frac{1}{16}b^3 \mp \frac{1}{4}pb \mp \frac{1}{2}q$, id est distantia Centri ab Axe E G, minor esse debet quàm $EH = 4\sqrt{\frac{1}{27}VE^3}$, hoc est (ob $VE = \frac{1}{4}bb \mp \frac{1}{2}p$) quam $\frac{1}{3}bb \mp \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{12}bb \mp \frac{1}{6}p}$; signis + & — in dubio relictis, ut secundum æquationis cujusvis naturam variari possint; quemadmodum in Cubicis superius ostensum est.

Termini autem ultimi r limitatio eadem facilitate inveniri nequit; id adeò, quia Problema est solidum, in Curvam Parabolæ demittere perpendicularem, quodque non sine solutione æquationis Cubicæ resolvi potest. Itaque primo loco deficiat secundus terminus, vel si adfuerit tollatur, ut æquatio habeat formulam, $z^4. *. pz^2. qz. r. = 0$. Ac si fuerit $-r$, semper duabus vel quatuor Radicibus explicari potest; ut autem quatuor sint, oportet Centrum Circuli intra Paraboloïdes prædictas constitui, sive ut sit $-p$, ac qq minus quàm $\frac{8}{27}p^3$, sive cubo ex $\frac{2}{3}p$. Deinde habeantur Radices æquationis hujus $y^3. *. \frac{1}{2}py. \frac{1}{4}q = 0$, quantitatibus p & q iisdem signis annexis quibus in Biquadratica. Hæ autem Radices auxilio Tabulæ sinuum satis expeditè inveniuntur. Inventis autem tribus illis y, (quæ sunt ordinatim applicatæ ad Axem Parabolæ, de punctis ubi incidunt perpendicula in Curvam ejus scil. Z Y *Fig.* 4.) $pyy - 3y^4$. ex minore y, quantitatem maximam r designabit, si fuerit $-r$; qua si minor fuerit r, æquatio quatuor habebit Radices, aliter duas. Ast si fuerit $+r$, oportebit eam minorem esse quàm $3y^4 - pyy$ ex media y, nam si major sit, non nisi duas habere potest Radices, saltem si minor sit r, quàm $3y^4 - pyy$ ex minima y. Hac verò si major sit, nulla omninò Radice vera explicabilis est æquatio. Hi verò iidem limites aliter designantur ex quantitate q, scil. $\frac{1}{2}qy - y^4$ in primo casu, $y^4 - \frac{1}{2}qy$ in secundo, ac $y^4 + \frac{1}{2}qy$ in tertio.

Fieri autem potest ut duæ minores quantitates y non longè distent ab invicem, unde evenit quod utraque ex perpendicularibus major sit quàm recta G A, scil. cum qq majus sit quàm $\frac{4}{27}p^3$, minus verò quàm $\frac{8}{27}p^3$; cadente centro intra spatium Paraboloïdibus (utriusque Figuræ 2 & 3) interjectum. Hoc in casu, si fuerit $+r$, non nisi duæ possunt esse Radices, existente $y^4 + \frac{1}{2}qy$ ex maximâ y, major quàm r; aliter nulla. At si $\frac{1}{2}qy - y^4$ ex minimâ y, major fuerit quàm r signo — notata, r verò major quàm $\frac{1}{2}qy - y^4$ ex media y, tunc ha-

bentur quattuor Radices; at duæ tantùm, si vel major priore vel minor posteriore inventa sit r.

Si verò in æquatione fuerit $+ p$, vel si sit $- p$ & qq majus fuerit quàm $\frac{4}{27}p^3$, æquatio $y^3 . * . \frac{1}{2}py . \frac{1}{4}q$, unicâ tantùm explicatur Radice y; hoc est, una tantùm perpendicularis de Centro Circuli demitti potest: unde certò concluduntur duas tantum Radices haberi posse in æquatione data, quarum summa, si fuerit $- r$, cum quantitati r augetur; at si habeatur $+ r$, obtenta quantitate y, quântitas illa r minor esse debet quàm $y^4 + \frac{1}{2}qy$; nam si ea major sit, æquatio proposita absurda & impossibilis est.

Longum & superfluum esset omnes hujus sensus æquationes percurrere, cùm ex jam dictis attendenti satis evidens sit, quæ Negativæ quæ Affirmativæ sint; atque, quod Radicum harum Limites ex quantitatibus inventis y petantur. In exemplum verò, quod cuivis in cæteris imitari licet, proponantur indagandi Limites sive Conditiones sub quibus in Æquatione Biquadratica 4. Radices Affirmativæ dari possint. Hoc autem fit quoties Centrum Circuli G, ponitur in spatio V P K (*Fig.* 3.), ac simul habetur $+r$, sive Circuli Radius minor quàm G D: Unde patet, æquationem de quâ agitur hujus esse formulæ, $z^4 - bz^3 + pz^2 - qz + r = 0$; p verò majorem esse non posse quàm $\frac{3}{8}bb$, nec $\frac{3}{4}pb$, hoc in casu, quàm $\frac{1}{16}b^3 + \frac{1}{2}q$; deinde opus est ut $\frac{1}{4}bb - \frac{2}{3}p$ in $\sqrt{\frac{1}{12}bb - \frac{1}{3}p}$ major sit quàm $\frac{1}{32}b^3 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{4}pb$; & ex his Limitibus certò constabit Centrum intra spatium VPK inveniri. Ut verò definiatur quantitas r, solvenda primùm est Cubica, $y^3 . * . - \overline{\frac{3}{16}b^2 - \frac{1}{2}p}\,y = \frac{1}{32}b^3 + \frac{1}{4}q - \frac{1}{8}pb$; & habebuntur puncta, in quæ perpendiculares de Centro in Curvam Parabolæ cadunt.

Inventis autem tribus valoribus hujus y, r minor esse debet quam $\frac{3}{256}b^4 + \frac{1}{4}bq - \frac{1}{16}bbp + 3y^4 - \frac{3}{8}b^2yy + pyy$ ex media y, major verò quàm $\frac{3}{256}b^4 + \frac{1}{4}bq - \frac{1}{16}bbp + 3y^4 - \frac{3}{8}b^2yy + pyy$ ex minima y. Hos verò Limites si excedat r, non nisi duæ Radices haberi possunt. Denique si $\frac{3}{256}b^4 + \frac{1}{4}bq - \frac{1}{16}bbp + 3y^4 - \frac{3}{8}bbyy, + pyy$ ex maximâ y, minor fuerit quàm r, æquatio proposita impossibilis est.

Accidit etiam ut quatuor sint Affirmativæ, cum Centrum G consti-

ftituitur in fpatiolo VTS, ducta fcil. RTS perpendiculari in medium fuppofitæ lineæ AD: hoc autem fit cum p major eft quàm $\frac{3}{8}bb$, ac $\frac{3}{4}bb - \frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{16}bb - \frac{1}{6}p}$ major quàm $\frac{1}{2}pb - \frac{1}{16}bbb - \frac{1}{2}q$. Quo in cafu femper duæ, aliquando tres, ex Radicibus fiunt majores quàm $\frac{1}{4}b$.

Notandum verò hic limitem illum ex minima y productum, aliquando negativum fieri, five minorem nihilo; quoties fc maxima ex tribus perpendicularibus major eft quàm GD (*Fig.* 3.). Hoc, fi acciderit quantitas $+ r$, a Limite præfcripto ex media y, in nihilum minui poteft. Defectus verò Limitis ex minima y monftrat quanta poffit effe $- r$ in æquatione, fi habeantur tres Radices Affirmativæ ac una Negativa; quam fi excedat, non nifi duæ, altera Affirmativa, altera Negativa, dari poffunt. Hæc autem omnia demonftrantur ex eo quod prædicti Limites quantitatis r, fint differentiæ Quadratorum lineæ GD & perpendicularium in Curvam Parabolæ.

Ob perplexas verò cautiones, quas parit in æquationibus hifce fignorum diverfitas, præftat femper fecundum terminum tollere, ac deinde juxta præcepta jam tradita Radicum numerum ac figna inquirere; præfertim fi quantitates illæ y non multùm diftent ab invicem. Ex quatuor autem hifce Radicibus Affirmativis, duæ femper funt minores quam $\frac{1}{4}b$, duæ verò majores; nempe fi DG, minor fit quàm AG, five $\frac{1}{2}pb$ quàm $\frac{1}{8}b^3 + q$. Tres autem minores funt quam $\frac{1}{4}b$ quoties perpendicularis media, five ex media y inventa, major eft quàm AG, five $\frac{1}{4}bby$ major quàm $3y^3 - pyy$ ex eàdem media y; Quarta verò & maxima Radix major eft quàm maxima $y + \frac{1}{4}b$; æquatur autem differentiæ ipfius b & fummæ cæterarum trium Radicum, ideoque minor eft b. Sed jam *Manum de Tabula*; Fortaffis illi qui naturam Parabolæ penitius perfpectam habent, majori compendio hæc omnia peragere valebunt; at fi quantitates hæ omnes $b.p.q.$ & r, abfque refolutione Cubicæ æquationis ritè determinari poffint, non fine causâ ambigitur; quæcunque enim æquationibus planis hac in re fiunt, non veros Limites, fed Approximationes tantùm exhibent.

EPISTOLA DOMINI
COLIN MAC LAURIN

Mathefeos Profeſſoris in Accademia Edimburgenſi,
& R. S. S.

DATA

D^no^. MARTINO FOLKES, R. S. V. P^r^.

De Æquationibus, in quibus dantur Radices impoſſibiles.

PRæterita Hyeme ad te ſcripſi me cogitaſſe de facillima & ſimpliciſſima Methodo demonſtrandi NEWTONI Regulam, qua ſæpe cognoſcitur num Æquatio aliqua habeat Radices impoſſibiles, nec ne: Quæ Methodus ſpero fore ut non deſpliceat, cum communi tantum nitetur Algebra, fundeturque obviis Quantitatum proprietatibus, quæ ſequentibus Lemmatibus demonſtrantur, nec opus habeat Curvarum conſideratione, quod non ita convenire videtur ſubjecto mere Algebraico.

Lemma I. *Summa Quadratorum duarum Quantitatum realium ſemper major eſt duplo earundem Producto.* Sic $a^2 + b^2$ majus eſt quam $2ab$; nam eorum differentia $a^2 + b^2 - 2ab = \overline{a-b}^2$, idcirco poſitiva; cum ſit ſemper poſitivum Quadratum cujusvis Quantitatis, ſive poſitivæ, ſive negativæ.

Lemma II. *Summa Quadratorum trium Quantitatum realium, ſemper major eſt quam ſumma Productorum, quæ fiunt multiplicando binas illas Quantitates inter ſe.* Sic $a^2 + b^2 + c^2$ majus ſemper eſt quam $ab + ac + bc$: patet enim quod $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc}{2} = \frac{aa - 2ab + bb + aa - 2ac + cc + bb - 2bc + cc}{2} = \frac{\overline{a-b}^2 + \overline{a-c}^2 + \overline{b-c}^2}{2}$, id eſt ſemiſummæ Quadratorum differentiarum Quantitatum a, b, c; cum verò hæc Quadra-

drata sint positiva, sequitur quod excessus ipsorum $a^2+b^2+c^2$ supra $ab+ac+bc$ est etiam positivus; & summa Quadratorum trium Quantitatum major est summâ Productorum, quæ fiunt multiplicando binas Quantitates inter se.

Lemma III. *Tripla summa Quadratorum quatuor Quantitatum major est quàm dupla summa Productorum, quæ fiunt multiplicando binas Quantitates ex his inter se.* Nam $3a^2+3b^2+3c^2+3d^2-2ab-2ac-2ad-2bc-2bd-2cd=a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+a^2-2ad+d^2+b^2-2bd+d^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2cd+d^2=\overline{a-b}^2+\overline{a-c}^2+\overline{a-d}^2+\overline{b-c}^2+\overline{b-d}^2+\overline{c-d}^2$, id est summæ Quadratorum Differentiarum Quantitatum a, b, c, d, ideo $3a^2+3b^2+3c^2+3d^2$ majus est quam $2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$, cum excessus sit semper positivus.

Lemma IV. *Sit* m *Numerus Quantitatum* a, b, c, d, e *&c. summa Quadratorum* = A, *Summa Productorum ex binis quibuscunque illarum Quantitatum in se ductis*=B, *erit semper* $\frac{m-1}{2}\times$ A *majus quam* B.

Addendo enim Quadrata Differentiarum $a-b$, $a-c$, $a-d$, $b-c$, $b-d$, $c-d$ &c. a^2 sumitur tot vicibus, quot dantur Quantitates præter a, idem dicendum de b^2, c^2, &c. Rectangula autem $-2ab-2ac-2ad-2bc$ &c. semel tantum oriuntur; ergo summa omnium Quadratorum $\overline{a-b}^2+\overline{a-c}^2+\overline{a-d}^2+\overline{b-c}^2+\overline{b-d}^2+\overline{c-d}^2$ &c. $=\overline{m-1}\times a^2+\overline{m-1}\times b^2+\overline{m-1}\times c^2+$&c. $-2ab-2ac-2bc-$&c. $=\overline{m-1}\times \text{A}-2\text{B}$; sed $\overline{a-b}^2$, $\overline{a-c}^2$, $\overline{a-d}^2$ &c. Sunt semper positiva, ergo $\overline{m-1}\times\text{A}-2\text{B}$ est etiam positivum, ac proinde $\frac{m-1}{2}\times$ A majus est quam B.

Corol. Patet ex hac Demonstratione excessum ipsius $\overline{m-1}\times$ A supra 2 B semper esse æqualem summæ Quadratorum differentiarum harum Quantitatum a, b, c, d &c. & ubi hæ Quantitates sunt omnes æquales est $\overline{m-1}\times\text{A}-2\text{B}=0$, Aque cum hac modificatione intelligenda sunt præcedentia Lemmata.

Observandum, quod licet supposuerim Quantitates, a, b, c, d &c. esse positivas, propositiones etiam veras esse de Quantitatibus ne-

negativis, Quarum Quadrata eadem sunt, ac si essent positivæ; Productorum vero summa vel eadem vel minor, quam si essent positivæ.

PROPOSITIO I.

In Æquatione Quadratica, cujus Radices sunt reales, Quadratum secundi Termini semper majus esse debet, quam quater Productum ex primo & tertio.

Sint Radices $+a$, $+b$, x incognita. Æquatio erit

$$\begin{aligned} x^2 &- ax + ab = 0. \\ &- bx \end{aligned}$$

Jam cum $a^2 + b^2$ sit majus quam $2ab$ per Lem. I, erit $a^2 + b^2 + 2ab$ majus quam $4ab$; ideoque $\overline{a+b}^2 \times x^2$ Quadratum Secundi Termini majus quam $4ab \times x^2$ quater Productum ex Primo & Tertio Termino.

PROPOSITIO II.

In omni Cubica Æquatione cujus omnes Radices sunt reales, Quadratum 2di. Termini semper majus est quam triplum Productum ex primo & tertio.

Æquatio Cubica cujus omnes Radices sunt reales sic potest exprimi

$$\begin{aligned} y^3 &- ay^2 + aby - abc = 0. \\ &- by^2 + acy \\ &- cy^2 + bcy \end{aligned}$$

Per Lem. 2. $a^2 + b^2 + c^2$ majus est quam $ab + ac + bc$; addendo utrinque $2ab + 2ac + 2bc$, erit $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ $(= \overline{a+b+c}|^2)$ majus quam $3ab + 3ac + 3bc$, ac proinde $\overline{a+b+c}^2 \times y^4$ Quadratum 2di. Termini majus quam $\overline{3ab + 3ac + 3bc} \times y^4$, triplum Productum ex primo & tertio Termino.

Cor. I. In genere patet ex Demonstratione, Quod Quadratum Summæ trium Quantitatum realium $\overline{a+b+c}^2$ semper majus est, quam tripla summa omnium Productorum, quæ fiunt multiplicando binas quascunque ex illis Quantitatibus inter se.

Cor.

Cor. II. Ex hac Propoſitione ſequitur, quod ſi Quadratum Secundi Termini non ſit majus triplo Producto ex primo & tertio, Radices Æquationis non poſſint omnes eſſe reales, ſed duæ erunt impoſſibiles; Quod plane coincidit cum una parte Regulæ NEWTONI, qua detegitur num Æquationis Cubicæ Radices ſint impoſſibiles.

Cupit enim Vir Celeberrimus Scribi ſupra medios Terminos Æquationis Fractionem hanc $\frac{1}{3}$, & ſignum + poni ſub primum & ultimum Terminum, ut hic vides;

	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
x^3	$+ p x^2$	$+ q x$	$+ r = o$
+	—	*	+

deinde multiplicat Quadratum Secundi Termini per Fractionem, quæ ſupereminet, & ſi Productum illud majus ſit Producto ex Terminis adjacentibus, ponit ſignum + ſub ſecundo Termino; ſi vero illud Productum minus inveniatur, ponit ſignum —, atque affirmat tot dari Radices impoſſibiles, quot dantur mutationes inter ſigna. Jam per hanc Propoſitionem, ſi $p^2 x^4$ non eſt majus quam $3 q x^4$, vel $\frac{1}{3} p^2 x^4$ non majus quam $q x^4$, Radices non poſſunt omnes eſſe reales; Eadem ſuppoſitio duas dat inter ſigna mutationes, quodcunque ſignum ſit ſub tertio Termino, cum ſigna ſub primo & ultimo ſint ambo +; hæc ergo Propoſitio demonſtrat primam partem Regulæ Newtonianæ, quantum ſpectat Cubicas Æquationes.

Cor. III. Si ſecundus Terminus deſit in Cubica Æquatione & tertius Terminus ſit poſitivus, Æquatio habebit duas Radices impoſſibiles; Quadratum enim ſecundi Termini (in hoc caſu $= o$) minus erit triplo Producto ex Terminis adjacentibus. Sed hoc clarius patebit conſiderando, quod ubi ſecundus Terminus evaneſcit in Æquatione, Radices poſitivæ & negativæ ſunt æquales, & ſe mutuo deſtruunt; pone Radices eſſe $+ a$ & $- b - c$; in hoc caſu $a = b + c$; & tertii Termini Coefficiens erit $- ab - ac + bc = - bb - 2bc - cc + bc = - bb - bc - cc$, ideoque negativus; vel ſi ponas duas Radices poſitivas, & unam negativam, ſintque $- a$, $+ b$, $+ c$; erit nihilominûs tertii Termini Coefficiens negativus, nempe erit $- bb - bc - cc$; Quare ſi Radices ſint reales, tertii Termini Coefficiens ſemper eſt negativus (deficiente ſcilicet ſecundo Termino) ſi vero Coefficiens ille ſit poſitivus, certum eſt indicium duas dari Radices impoſſibiles.

PRO-

PROPOSITIO. III.

In omni Æquatione Cubica, cujus omnes Radices ſunt reales, Quadratum Termini Tertii, ſemper majus eſſe debet, quam ter Productum ex ſecundo, & quarto.

In Cubica Æquatione, cujus Radices ſunt a, b, c, Quadratum Coefficientis tertii Termini eſt $\overline{ab+ac+bc}^2$; productum ex Coefficientibus ſecundi & quarti eſt $a^2bc+ab^2c+abc^2$, ut patet ex ſola inſpectione Æquationis; porro clarum eſt, $a^2bc+ab^2c+abc^2$ eſſe ſummam Productorum ex binis quantitatum ab, ac, bc; ideo per Cor. I. Propoſ. II. Quadratum ſummæ harum Quantitatum (id eſt, $\overline{ab+ac+bc}^2$) majus eſſe debet quam $3a^2bc+3ab^2c+3abc^2$; itaque $\overline{ab+ac+bc}^2\times y^2$, id eſt Quadratum Tertii Termini, majus eſſe debet quam $\overline{3a^2bc+3ab^2c+3abc^2}\times y^2$, id eſt, quam triplum Productum ex ſecundo & quarto Termino.

Cor. 1. Sequitur ac Demonſtratione, quod $\overline{ab+ac+bc}^2$ majus eſt quam $3abc\times\overline{a+b+c}$.

Cor. 2. Si Quadratum tertii Termini minus inveniatur, quam triplum Productum e ſecundo & quarto Termino, Radices Æquationis non poſſunt omnes eſſe reales; quod convenit cum ſecunda parte Regulæ Newtonianæ; hic enim. Caſus dat — ponendum ſub tertio Termino. Itaque duæ ſunt mutationes ſignorum, quodcunque ſit ſignum ſub ſecundo Termino.

$$\begin{array}{cccc} & \frac{\cdot}{\cdot} & \frac{\cdot}{\cdot} & \\ x^3 & +px^2 & +qx & +v=0 \\ + & + & - & + \end{array}$$

Scholium. Eodem modo demonſtrari poteſt, quod ſi in Cubica Æquatione ſecundus Terminus deſit, Cubum tertiæ partis tertii Termini poſitive ſumti, ſemper majorem eſſe Quadrato ultimi Termini dimidiati.

Sint Æquationis Radices $+a$, $-b$, $-c$, vel $-a$, $+b$, $+c$; ſitque $a=b+c$. in hoc caſu deficiet ſecundus Terminus, ipſaque Æquatio hanc formam induet,

$$\begin{array}{l} y^3 * -b^2y \pm bc\times\overline{b+c}=0. \\ -bcy \\ -c^2y \end{array}$$

Qua-

Quadratum ipsius $b-c$ semper est positivum, cum b & c sint Quantitates reales, ponamus illud Quadratum ($bb-2bc+cc$) æquale D, erit $b^2+bc+c^2=D+3bc$, & $\overline{b+c}^2=D+4bc$; erit ideò $\frac{\overline{b^2+bc+c^2}^3}{27}=\frac{D^3}{27}+\frac{D^2bc}{3}+Db^2c^2+b^3c^3$, & $b^2c^2\times\frac{\overline{b+c}^2}{4}=\frac{Db^2c^2}{4}+b^3c^3$. Jam clarum est quod $\frac{D^3}{27}+\frac{D^2bc}{3}+Db^2c^2+b^3c^3$ majus est $\frac{Db^2c^2}{4}+b^3c^3$, (Totum majus parte) cum D sit positivum ut etiam bc, nam b & c sunt radices eodem signo affectæ. Idcirco Cubus tertiæ partis tertii Termini, signo mutato, ($\frac{\overline{b^2+bc+c^2}^3}{27}$) semper major est Quadrato ultimi Termini dimidiati ($b^2c^2\times\frac{\overline{b+c}^2}{4}$.) In Cubica Æquatione $x^3 * + qx + r = 0$, si q sit positivum, vel si $\frac{q^3}{27}$ minus sit quam $\frac{1}{4}r^2$, patet Æquationem duas habere Radices impossibiles si hoc Corol. conferatur cum Cor. III. Prop. II.

PROPOSITIO IV.

In Æquatione Quadrato-quadratica, cujus omnes Radices sunt Reales, $\frac{3}{8}$ Quadrati Termini Secundi semper superant productum ex primo & tertio Termino; & $\frac{3}{8}$ Quadrati quarti Termini semper superant Productum ex tertio & quinto.

1. Sit Æquatio $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$; Cum omnes Radices ponantur reales, vocentur a, b, c, d. erit $p=a+b+c+d$. $q=ab+ac+ad+cd$. Sed patet per Lem. 3. quod $3a^2+3b^2+3c^2+3d^2$ majus est quam $2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$; addendo utrinque $6ab+6ac+6ad+6bc+6bd+6cd$, patebit $3\times\overline{a+b+c+d}^2$ majus esse quam $8ab+8ac+8ad+8bc+8bd+8cd$; id est $3p^2$ majus esse quam $8q$, ideoque $\frac{3}{8}p^2x^6$ majus quam qx^6.

in $\overline{m-1}$, majus est quam summa Productorum, quæ fiunt multiplicando binas illis quascunque ex illis Quantitatibus inter se, ducta

2. Cum sit $r = abc + abd + acd + bcd$; & $s = abcd$; & cum $qs = a^2b^2cd + a^2c^2bd + a^2d^2bc + b^2c^2ad + b^2d^2ac + c^2d^2ab$, quæ summa componitur ex productis quæ oriuntur multiplicando inter se binas quascunque ex quantitatibus abc, abd, acd, bcd, quarum summa $= r$; sequitur $3r^2$ semper majus esse, quam $8qs$. Ita ut $\frac{3}{8}$ Quadrati secundi vel quarti Termini semper superent Productum ex Terminis utrinque adjacentibus.

Cor. Multiplicetur Quadratum secundi vel quarti Termini in Æquatione Quadrato-quadratica per fractionem $\frac{3}{8}$, & si Productum illud non excedat Productum ex Terminis adjacentibus, Æquatio habebit quasdam Radices impossibiles.

PROPOSITIO V.

Sit Æquatio cujuscunque Dimensionis ut m, sintque Cœfficientes secundi, tertii, ultimi, penultimi antepenultimi Termini respective A, B, E, D, C; *si Radices sint omnes Reales, erit* $\overline{m-1} \times A^2$ *semper majus, quam* $2mB$, *&* $\overline{m-1} \times D^2$ *semper majus quam* $2m \times CE$.

1. Nam pone Radices esse a, b, c, d, e, &c. erit per Lem. 4. $\overline{m-1} \times a^2 + \overline{m-1} \times b^2 + \overline{m-1} \times c^2$ &c. majus quam $2ab + 2ac + 2ad$ &c. addendo utrinque $\overline{2m-2} \times ab + \overline{2m-2} \times ac + \overline{2m-2} \times ad$, &c. summa $\overline{m-1} \times a^2 + \overline{2m-2} \times ab + \overline{m-1} \times b^2$ + &c. $(\overline{m-1} \times \overline{a+b+c \,\&c}^2)$ major erit quam $2mab + 2mac + 2mad$ + &c. id est $\overline{m-1} \times A^2$ majus erit quam $2mB$.

2. In Genere sequitur ex hac Demonstratione, quod Quadratum summæ quarumvis Quantitatum, quarum numerus est m, ductum in

in $2m$. Sed facile cognoscitur ex formatione Æquationum, quod CE est summa Productorum quæ fiunt ex multiplicatione binarum Quantitatum, quarum summa est D. Quare sequitur etiam $\overline{m-1} \times D^2$ majus esse quam $2m$CE.

SECUNDA EPISTOLA EJUSDEM AD EUNDEM,

De Radicibus Æquationum, cum Demonstratione aliarum quarundam Regularum Algebræ.

Anno 1725 ad te scripsi me habere Methodum demonstrandi NEWTONI Regulam de Radicibus impossibilibus in Æquationibus, quæ Methodus ex hoc claro Principio deducitur; Quadrata scilicet Differentiarum Quantitatum realium semper esse positiva. Deinde prima hujus Methodi Principia tibi misi, quæ in Transactionibus Philosophicis Mensis Maji Anni 1726 in lucem fuere edita; Propositum, quod ante aliquod tempus habui, edere Tractatum de Algebra, in quo & hunc & quosdam alios subjectos tractarem nova via, in causa fuit cur non operæ pretium putarem reliqua tibi mittere; sed quædam me jam movent rationes, ut una cum continuatione Præcedentis Methodi, parvum tibi mittam specimen duarum aliarum Methodorum, quas in eodem subjecto sum secutus, cum quibusdam in Æquationes observationibus, quas novas esse opinor; & quæ forsan magis tibi placebunt, quam quod pertinet ad ipsas Radices impossibiles; Præter NEWTONI Regulam, e sequentibus generalibus Propositionibus multæ variæque oriuntur Regulæ inveniendi Radices imaginarias, diversæ tum ab ea, quam NEWTONUS edidit, tum ab omnibus aliis, quæ jam in lucem prodierunt; unam speciatim exponam, omnibus huc usque notis utiliorem.

Ponamus dari Æquationem Dimensionum n, & hujus formæ $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - Gx^{n-7} + Hx^{n-8} - Ix^{n-9} + Kx^{n-10}$ &c.

Sintque hujus Æquationis Radices $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l$ &c. erit $A = a + b + c + d + e$ &c. voco itaque a, b, c, &c. *Partes* seu *Terminos* Coefficientis A; eandem ob causam vo-

co *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *bc*, *bd*, *be* &c. *Partes* seu *Terminos* Coefficientis B; *abc*, *abd*, *abe*, *bcd*, &c. *Partes* seu *Terminos* Coefficientis C, & sic de cæteris. Per *Dimensionem* alicujus Termini intelligo Numerum Radicum, quæ in ejus partibus inter se sunt multiplicatæ, qui numerus semper æqualis est numero Terminorum, qui in Æquatione hunc Coefficientem præcedunt; Sic A est Coefficiens unius Dimensionis, B duarum, C trium, & sic de cæteris. Partem seu Terminum Coefficientis C dico *similem* Parti seu Termino Coefficientis G, ubi illa pars ipsius G continet omnes radices Partis ipsius C, sic *abc* & *abcdefg* sunt Partes similes ipsorum C & G; eodem modo *abcd*, & *abcdef* sunt Partes similes ipsorum D & F; cum Pars ipsius F contineat omnes Radices Partis ipsius D. *Dissimiles* voco Partes, quæ communem Radicem non habent, sic *abc*, & *defgh* sunt Partes Dissimiles Coefficientium C & F. Summam omnium Productorum, multiplicando partes alicujus Coefficientis ut C per similes partes alius Coefficientis ut G sic ex primo $C'G'$ ducendo Lineolam supra utrumque Coefficientem, eodem modo $D'F'$ exprimit summam omnium Productorum, quæ fieri possunt multiplicando Partes similes ipsorum D & F inter se, & $C' \times C'$ exprimit summam Quadratorum omnium Partium Coefficientis C; sed $C' \times C_{,}$ exprimit summam omnium productorum quæ fiunt multiplicando binos quoscunque Terminos ipsius C inter se. (unde sequitur $C^2 = C' \times C' + 2C' \times C_{,,}$.) Hisce signis intellectis, & quinque Propositionibus Præcedentis Epistolæ præmissis sequitur jam.

PROPOSITIO VI.

Si Differentia Dimensionum duorum quorumvis Coefficientium ut C *&* G *vocetur* m, *erit Productum horum Coefficientium æquale* $C'G' + \overline{m+2} \times B'H' + \frac{m+3}{1} \times \frac{m+4}{2} \times A'I' + \frac{m+4}{1} \times \frac{m+5}{2} \times \frac{m+6}{3} \times 1 \times K$.

Ubi B & H sunt Coefficientes adjacentes ipsis C & G, A & I Coefficientes adjacentes ipsis B & H, 1 & K Coefficientes adjacentes ipsi A & L.

No-

Notum est C esse æquale $abc + abd + abe + abf + abg +$ &c. $G = abcdefg + abcdefh + abcdefi + bcdefgh +$ &c. Patet ulterius

1°. Quod in Producto CG unusquisque Terminus ipsius C′G′ semel orietur, ut $a^2 b^2 c^2 defg$. Sed

2°. Quivis Terminus ipsius B′H′, ut $a^2 b^2 cdefgh$, potest esse Productum vel ex $abc \times abdefgh$, vel ex $abd \times abcefgh$, vel ex $abe \times abcdfgh$, vel ex $abf \times abcdegh$, vel ex $abg \times abcdefh$, vel tandem ex $abh \times abcdefg$; itaque potest esse Productum ex quovis Termino ipsius C qui cum Radicibus, ab, contineat unam ex reliquis c, d, e, f, g, h, multiplicato per illum Terminum ipsius G, qui cum ab cæteras quinque Radices continet; id est Productum illud $a^2 b^2 cdefgh$ tot dabitur vicibus, quot continet Radices præter a, & b; vel in genere toties quoties unitas datur in Differentia Dimensionum ipsorum B & H. id est $m+2$ vicibus, quia m exprimit differentiam Dimensionum ipsorum C & G; idcirco, in expressione Valoris ipsius C G, Coefficiens secundi Termini, B′H′ erit $m+2$.

3°. Unusquisque Terminus, ipsius A′I′, ut $a^2 bcdefghi$, potest esse Productum cujusvis Partis ipsius C, quæ cum Radice a contineat duas quascunque e reliquis b, c, d, e, f, g, h, i, (quarum numerus æqualis est Differentiæ Dimensionum ipsorum A & I, id est in genere $= m+4$) multiplicatæ cum illa parte ipsius G quæ cum a reliquas sex radices continet; itaque $a^2 bcdefghi$ (vel quivis alius ipsius A′I′ Terminus) tot dabitur vicibus, quot dari possunt diversa Producta ex binis Quantitatibus, quarum Numerus est $m+4$, id est vicibus $m+4 \times \frac{m+4-1}{2}$, vel $\frac{m+3}{1} \times \frac{m+4}{2}$; ideo ad exprimendum Valorem ipsius CG Coefficiens tertii Termini A′I′ debet esse $\frac{m+3}{1} \times \frac{m+4}{2}$.

4°. Unusquisque Terminus ipsius $1 \times K$, ut $abcdefghik$, potest esse productum ex quavis parte ipsius C, quæ continet tres radices ipsius K, in illam partem ipsius G, quæ alias omnes continet radices; ideo $1 \times K$ tot orietur vicibus in producto CG, quot fieri possunt diversa producta ex ternis Quantitatibus, quarum numerus est

$m+6$, id est vicibus $m+6\times\frac{m+5}{2}\times\frac{m+4}{3}$; ideoque Coefficiens quarti Termini in Expressione Valoris ipsius CG, erit $\frac{m+4}{1}\times\frac{m+5}{2}\times\frac{m+6}{3}$.

In genere, ad exprimendum Valorem Producti duorum quorumvis Coefficientium, ut C & G. Si x exprimat ordinem alicujus Termini hujus Valoris, ut ex: gr: ipsius $A'I'$, idest, si x sit æqualis numero Terminorum qui præcedunt $A'I'$, ipsius $A'I'$ Coefficiens erit $\frac{2x+m}{1}\times\frac{2x+m-1}{2}\times\frac{2x+m-2}{3}$ &c. tot sumendo fractiones in hac Progressione, quot dantur unitates in x.

Cor. 1. Si per hanc Propositionem quæratur Quadratum alicujus Coefficientis, ut E, erit $m=0$, Differentia Dimensionum Coefficientium in hoc Casu evanescente, & habebimus $E^2 = E'\times E' + 2D'F' + 3\times$ [illegible] $C'G' + 4$ [illegible] $B'H'$ &c. $= E'\times E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 252K$: idcirco, si (ut in Definitione) $E'\times E,$ exprimat summam Productorum ex binis partibus quibuscunque ipsius E erit $E^2 = E'\times E' + 2E'\times E,$, ideoque $E'\times E, = D'F' + 3C'G' + 10B'H' + 35A'I' + 126K$.

Cor. 2. Sequitur ex hac Propositione, quod

$E^2 = E'\times E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 252K.$

$DF = \quad - \; - \; - \; D'F' + 4C'G' + 15B'H' + 56A'I' + 210K.$

$CG = \quad - \; - \; - \; - \; - \; C'G' + 6B'H' + 28A'I' + 120K.$

$BH = \quad - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; B'H' + 8A'I' + 45K.$

$AI = \quad - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; A'I' + 10K.$

$K = \quad - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; K.$

Cor. 3. Facile quoque patet ex Corol. Præcedente, quod

$E'\times E' = E^2 - 2DF + 2CG - 2BH + 2AI - 2K.$

$D'F' = \quad - \; - \; DF - 4CG + 9BH - 16AI + 25K.$

$C'G' = \quad - \; - \; - \; - \; CG - 6BH + 20AI - 50K.$

$B'H' = \quad - \; - \; - \; - \; - \; - \; BH - 8AI + 35K.$

$A'I' = \quad - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; AI - 10K.$

PRO-

PROPOSITIO VII.

Sit $l = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ *&c., sumendo tot fractiones, quot Coefficiens* E *habet dimensiones, erit semper* $\frac{l-1}{2l} \times E^2$ *majus quam* $DF - CG + BH - AI + K$, *si Radices Æquationis sunt omnes reales.*

Patet l exprimere numerum Partium seu Terminorum qui dantur in Coefficiente E; Patet quoque ex Prop. V. quod $\frac{l-1}{2l} \times E^2$ semper majus esse debet, quam summa Productorum, quæ fiunt multiplicando binas Partes quascunque ipsius E inter se, id est majus quam $E' \times E_{,}$; Sed $2E' \times E_{,} = E^2 - E' \times E' =$ (per Theor. 1. Corol. ultimi) $2DF - 2CG + 2BH - 2AI + 2K$; idcirco, cum $\frac{l-1}{2l} \times E^2$ semper sit majus quam $E'E$, sequitur quod $\frac{l-1}{2l} \times E^2$ etiam majus est quam $DF - CG + BH - AI + K$, si Æquationis Radices sint omnes reales.

Scholium. Hæc prima fuit generalis Propositio, quæ sequendo Methodum meam mihi occurrebat. Cum enim primo observarem, quod, si l exprimat numerum quarumvis Quantitatum, Quadratum illarum summæ ductum in $\frac{l-1}{2l}$ semper majus esset summa Productorum quæ fiunt multiplicando binas quascunque ex illis inter se, & quod excessus esset æqualis summæ Quadratorum Differentiarum harum Quantitatum divisæ per $2l$, facile inde patebat, quod si in Æquatione $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4}$ &c. $= 0$, ubi B est summa Productorum quæ oriuntur ex multiplicatione binarum Radicum inter se, si l exprimat numerum Radicum in Æquatione, $\frac{l-1}{2l} \times A^2$ semper esse majus quam B; atque hæc est una pars Prop. V.

Dein-

Deinde comparavi ſummam Productorum ex binis Partibus ipſius B, cum Producto AC, illamque ſummam inveni æqualem non ipſi AC, ſed AC — D; unde collegi, quod ſi l exprimat numerum Partium ipſius B, tunc $\frac{l-1}{2l} \times B^2$ ſemper eſſe majus quam AC — D, hæc que facile me duxerunt ad hanc generalem Propoſitionem.

PROPOSITIO VIII.

Exprimat r *Dimenſiones Coefficientis* C, *&* s *Differentiam Dimenſionum Coefficientium* C *&* G, *ſint* B *&* H *Coefficientes adjacentes ipſis* C *&* G, *erit ſemper* $\overline{n-r-s} \times r \times C'G'$ *majus quam* $\overline{s+1} \times \overline{s+2} \times B'H'$, *ſi omnes Æquationis Radices ſint Quantitates reales, eodem ſigno affectæ.*

Nam ſumendo Differentias omnium harum Partium ipſius C, quæ habent omnes Radices communes præter unam, ut abc, abh, abi, &c. & multiplicando Quadrata harum Differentiarum per illas partes Coefficientis D, quæ ſunt diſſimiles utrique parti ſumtæ differentiæ, (requiritur ut Coefficiens D ſit dimenſionum s), ſumma omnium horum Quadratorum ita multiplicatorum conſiſtet ex Terminis ipſius C′G′ poſitive ſumtis, & ex Terminis ipſius B′H′ negative ſumtis. Multiplicando hoc modo $\overline{abc-abh}|^2 + \overline{abc-abi}|^2 + \overline{abc-abk}|^2$ &c. $+ \overline{abc-ach}|^2 + \overline{abc-aci}|^2 + \overline{abc-ack}|^2$ &c. $+ \overline{abc-bch}|^2 + \overline{abc-bci}|^2 + \overline{abc-bck}|^2$ &c. per $defg$ Terminum ipſius D, qui eſt diſſimilis omnibus hiſce Partibus ipſius C, patebit quod $a^2b^2c^2defg$ dabitur in ſumma Productorum vicibus $r \times \overline{n-r-s}$; hæc enim Producta poſſunt etiam ſic exprimi $defga^2b^2 \times \overline{\overline{c-h}|^2 + \overline{c-i}|^2 + \overline{c-k}|^2}$ &c. $+ defga^2c^2 \times \overline{\overline{b-h}|^2 + \overline{b-i}|^2 + \overline{b-k}|^2}$ &c. $+ defgb^2c^2 \times \overline{\overline{a-h}|^2 + \overline{a-i}|^2 + \overline{a-k}|^2}$ &c. ubi Numerus differentiarum $c-h$, $c-i$, $c-k$, &c. quarum Quadrata ducuntur in $defga^2b^2$, manifeſte æqualis eſt numero Radicum Æquationis, quæ non dantur in a^2b^2.

$a^2b^2c^2defg$, vel in $abcdefg$, ideſt, æqualis exceſſui numeri Radicum Æquationis, ſupra dimenſiones ipſius $abcdefg$, qui eſt Terminus ipſius G, ideſt tandem æqualis $n-r-s$; Sed colligendo in unam ſummam omnia illa Producta, terminus $\overline{n-r-s}\times a^2b^2c^2defg$ toties dabitur, quoties unitas datur in r; quia Termini, qui ſubtrahuntur ex abc, poſſunt ab illo differre vel per defectum Radicis c, ut abh, abi, abk, &c., vel per defectum Radicis b, ut ach, aci, ack &c., vel per defectum Radicis a, ut bch, bci, bck &c. ideſt Terminus $\overline{n-r-s}\times a^2b^2c^2defg$ tot vicibus debet oriri, quot dantur dimenſiones in abc uno ex terminis ipſius C, vel quot dantur unitates in numero r, qui exprimit Dimenſiones ipſius C; ideoque Terminus $a^2b^2c^2defg$ dabitur in ſumma dictorum Productorum vicibus $r\times\overline{n-r-s}$.

Pars negativa conſiſtet ex Terminis ipſius B'H' duplicatis, quorum unuſquiſque ut $a^2b^2cdefgh$ tot oriri debet vicibus, quot dari poſſunt Differentiæ $c-d$, $c-e$, $c-f$, $c-g$, $d-e$ &c. inter terminos c, d, e, f, g &c., quorum Numerus eſt æqualis $s+2$; id eſt, Terminus $2a^2b^2cdefgh$ dari debet vicibus $\overline{s+2}\times\frac{s+1}{2}$; ideoque $a^2b^2cdefgh$, vel quivis alius ipſius B'H' Terminus dari debet in Parte negativa vicibus $\overline{s+1}\times\overline{s+2}$; cum autem tota ſumma ſit Poſitiva, ſequitur quod $\overline{n-r-s}\times r$C'G' ſemper majus eſt quam $\overline{s+1}\times\overline{s+2}\times$B'H'.

COR. 1. Sit comparandum E'E' ſumma Quadratorum Partium ipſius E, cum D'F' ſumma Productorum ex Partibus ſimilibus ipſorum D & F; in hoc caſu s evaneſcit, & $\overline{n-r}\times r$E'E' debet eſſe majus quam 2D'F'. Sit $\overline{n-r}\times r=m$, erit $\overline{n-r-1}\times\overline{r-1}=m-n+1$; & $\overline{n-r-2}\times\overline{r-2}=m-2n+4$; & $\overline{n-r-3}\times\overline{r-3}=m-3n+9$; $\overline{n-r-4}\times\overline{r-4}=m-4n+16$, patet enim in genere, quod $\overline{n-r-q}\times\overline{r-q}=\overline{n-r}\times r-qn+qq=m-qn+qq$. Tunc per hanc propoſitionem ſupponendo

$$m E'E' - 2 D'F' = a'$$
$$\overline{m-n+1} \times D'F' - 12\, C'G' = b'$$
$$\overline{m-2n+4} \times C'G' - 30\, B'H' = c'$$
$$\overline{m-3n+9} \times B'H' - 56\, A'I' = d'$$
$$\overline{m+4n+16} \times A'I' - 90\, K = e'$$

Quantitates a', b', c', d', e', ſemper debent eſſe poſitivæ, ubi omnes Æquationis Radices ſunt Quantitates reales eodem ſigno affectæ; Coefficientes Partibus Negativis præfixi ſunt numeri 2, 12, 30, 56, 90, quarum differentiæ creſcunt per 8 in Progreſſione Arithmetica.

COR. 2. Ponendo ut ſupra $\overline{n-r} \times r = m$, ut etiam $m \times \overline{m-n+1} = m'$, $m' \times \overline{m-2n+4} = m''$, $m'' \times \overline{m-3n+9} = m'''$, poteſt demonſtrari eodem modo, quo hæc Propoſitio demonſtrata fuit, quod ſi ſit

$$m E'E' - 2 D'F' - a'$$
$$m' E'E' - 2 \times 12\, C'G' = a''$$
$$m'' E'E' - 2 \times 12 \times 30\, B'H' = a'''$$
$$m''' E'E' - 2 \times 12 \times 30 \times 56\, A'I' = a'''' \text{ \&c.}$$

Erunt a', a'', a''', a'''', &c. ſemper Poſitiva, ſi Radices Æquationis ſint Reales, ſive iiſdem ſignis afficiantur ſive diverſis: Coefficientes Negativi fiunt ducendo coefficientes 2, 12, 30, 56, 90, Cor. Præcedentis in ſe invicem.

PROPOSITIO. IX.

Exprimant a', b', c', d', e', *&* m *eaſdem Quantitates ac in Corollariis ultimæ Propoſitionis, & erit* $\mathrm{m}E^2 - \overline{\mathrm{m+n+1}} \times DF = a' + b' + 2c' + 5d' + 14e'$.

Nam per Cor. 2. Prop. VI.
$E^2 = E'E' + 2 D'F' + 6 C'G' + 20 B'H' + 70 A'I' + 252 K$,
& per idem Cor.
$DF = \text{- - -} D'F' + 4 C'G' + 15 B'H' + 56 A'I' + 210 K$;

Ergo

Ergo $m\,E^2 - \overline{m+n+1} \times DF = m\,E'E' + \overline{m-n-1} \times D'F' + \overline{m-2n-2} \times 2\,C'G' + \overline{m-3n-3} \times 5\,B'H' + \overline{m-4n-4} \times 14\,A'I' + \overline{m-5n-5} \times 42\,K =$ (substituendo successive pro $m\,E'E'$, $\overline{m-n+1} \times D'F'$, $\overline{m-2n+4} \times C'G'$, $\overline{m-3n+9} \times B'H'$, $\overline{m-4n+16} \times A'I'$, ipsorum valores deducti ex primo Corol. Propositionis Præcedentis) $a' + b' + 2c' + 5d' + 14e'$, ubi Coefficientes Præfixi ipsis a', b', c', d', e', sunt Differentiæ Coefficientium ipsorum $E'E'$, $D'F'$, $C'G'$, $B'H$, $A'I'$, & K in Valoribus ipsorum E^2 & DF desumtis ex Corol. 2. Prop. VI. suntque $1-0$, $2-1$, $6-4$, $20-15$, $70-56$, & $252-210$.

COR. Cum sit $m = \overline{n-r} \times r$, ideoque $m+n+1 = \overline{n-r+1} \times \overline{r+1}$, sequitur, quod $\frac{r}{r+1} \times \frac{n-r}{n-r+1} \times E^2$ semper debet esse majus quam DF, Productum ex Coefficientibus adjacentibus ipsi E; atque inde deducuntur fractiones, quæ in NEWTONI Regula scribuntur supra Terminos Æquationis, & quæ multiplicatæ per Quadrata Terminorum, quibus supereminent, semper debent efficere Productum majus Producto ex Terminis adjacentibus; si Radices Æquationis sint reales: Manifestum enim est, quod fractio scribenda super Terminum $E x^{n-r}$ divisionis ipsius $\frac{n-r}{r+1}$ per $\frac{n-r+1}{r}$.

PROPOSITIO X.

Iisdem Notis servatis ac in Propositionibus præcedentibus, eodem modo invenietur, quod, ut

$$m\,E^2 - \overline{m+n+1} \times DF = a' + b' + 2c' + 5d' + 14e' \textit{ ita}$$

$$\overline{m-n+1} \times DF - \overline{m+2n+4} \times CG = b' + 3c' + 9d' + 28e',$$

$$\overline{m-2n+4} \times CG - \overline{m+3n+9} \times BH = c' + 5d' + 20e',$$

$$\overline{m-3n+9} \times BH - \overline{m+4n+16} \times AI = d' + 7e',$$

$$\overline{m-4n+16} \times AI - \overline{m+5n+25} \times K = e'.$$

Hæc Theoremata facile deducuntur ex iis, quæ habentur in Cor. 2.

Prop. VI. & in Cor. 1. Prop. VIII. & Coefficientes præfixi ipsis a', b', c', d', e', sunt Differentiæ Coefficientium terminorum Respondentium in Valoribus ipsorum E^2, DF, CG, BH, AI, & K, in Corol. 2. Prop. VI.

COR. Inde Producta duorum quorum vis Coefficientium inter se possunt conferri, ut DF & AI, si summa Dimensionum ipsorum D & F sit æqualis summæ Dimensionum ipsorum A & I. Sint Dimensiones ipsorum A & F respective æquales ipsis s, & m, sitque $p = \frac{n-s}{s+1} \times \frac{n-s-1}{s+2} \times \frac{n-s-3}{s+3}$ &c. tot sumendo factiones, in eadem Progressione, quot dantur unitates in differentia Dimensionum ipsorum D & A. Sit $q = \frac{n-m}{m+1} \times \frac{n-m-1}{m+2} \times \frac{n-m-2}{m+3}$ &c., tot sumendo fractiones, quot sumtæ fuerunt in Valore ipsius p. Erit semper $\frac{q}{p} \times$ DF majus quam AI si omnes Radices Æquationis sint Quantitates Reales, eodem signo affectæ. Hæc Regula etiam locum habet, licet Radices diversis afficiantur signis, si modo Coefficientes D & F sint æquales.

PROPOSITIO XI.

Iisdem positis ac in Propositionibus Præcedentibus,

erit 1. $\left.\begin{array}{l} mE^2 - \overline{m+1} \times 2DF + \overline{m+4} \times 2CG - \overline{m+9} \times 2BH \\ + \overline{m+16} \times 2AI - \overline{m+25} \times 2K \text{ - - - - - -} \end{array}\right\} = a'.$

2. $\left.\begin{array}{l} \overline{m-n+1} \times DF - \overline{m-n+4} \times 4CG + \overline{m-n+9} \times 9BH \\ - \overline{m-n+16} \times 16AI. + \overline{m-n+25} \times 25K \text{ - -} \end{array}\right\} = b'.$

3. $\left.\begin{array}{l} \overline{m-2n+4} \times CG - \overline{m-2n+9} \times 6BH + \overline{m-2n+16} \\ \times 20AI - \overline{m-2n+25} \times 50K \text{ - - - - - -} \end{array}\right\} = c'.$

4. $\overline{m-3n+9} \times BH - \overline{m-3n+16} \times 8AI + \overline{m-3n+25} \times 35K = d'.$

5. - - - - $\overline{m-4n+16} \times AI - \overline{m-4n+25} \times 10K = e'.$

Hæc Theoremata facile deducuntur ex Cor. 3. Prop. VI. Primum clare patet hoc modo, $a' = mE'E' - 2D'F' =$ (per dictum Corollarium)

m

$$\left.\begin{array}{l} mE^2 - 2mDF + 2mCG - 2mBH + 2mAI - 2mK \\ -\ 2DF + \ 8CG - 18BH + 32AI - 50K \end{array}\right\} = mE^2 -$$
$$\overline{m+1} \times 2DF + \overline{m+4} \times 2CG - \overline{m+9} \times 2BH + \overline{m+16} \times 2AI - \overline{m+25} \times 2K.$$

Reliqua Theoremata deducuntur ex eodem Corollario collato cum Cor. 1. Prop. VIII.

PROPOSITIO XII.

Iisdem positis ac in Cor. 2. Prop. VIII. erit

$$1.\ \left.\begin{array}{l} mE^2 - \overline{m+1} \times 2DF + \overline{m+4} \times 2CG - \overline{m+9} \times 2BH + \overline{m+16} \\ \times 2AI - \overline{m+25} \times 2K \text{ - - - - - - - - - -} \end{array}\right\} = a'.$$

$$2.\ \left.\begin{array}{l} m'E^2 - 2m'DF + \overline{m' - 12} \times 2CG - \overline{m' - 72} \times 2BH + \\ \overline{m' - 240} \times 2AI - \overline{m' - 600} \times 2K \text{ - - - - - -} \end{array}\right\} = a''.$$

$$3.\ \left.\begin{array}{l} m''E^2 - 2m''DF + 2m''CG - \overline{m'' + 360} \times 2BH - \\ \overline{m'' + 360} \times 8 \times 2AI. - \overline{m'' + 360} \times 35 \times 2K \text{ - - -} \end{array}\right\} = a'''.$$

$$4.\ \left.\begin{array}{l} m''' \times \overline{E^2 - 2DF + 2CG - 2BH} + \overline{m''' - 750} \times 28 \times \\ 2AI - \overline{m''' - 7200} \times 28 \times 2K \text{ - - - - - - -} \end{array}\right\} = a''''.$$

Hæc Theoremata fluunt ex Cor. 3. Prop. VI. Collato cum Corol. 2. Prop. VIII. Primum idem est ac primum in Propositione Præcedente: Secundum demonstratur substituendo in $mE'E' - 24C'G' = a''$ Valores ipsorum $E'E'$ & $C'G'$ ex Corol. 3. Prop. VI. Tertium invenitur substituendo in $m''E'E' - 720B'H' = a'''$ Valores ipsorum $E'E'$ & $B'H'$; atque simili substitutione continuari possunt hæc Theoremata.

COROLLARIUM GENERALE.

Ex hisce Propositionibus, magna deducitur varietas Regularum, quibus inveniri potest, num Æquatio aliqua habeat Radices imaginarias, nec ne; Fundamentum Regulæ NEWTONIANÆ demonstratur Prop. IX. & ipsius Corollariis; Septima Propositio ostendit, quod si $\frac{l-1}{2l} \times E^2$ non sit majus quam $DF - CG + BH - AI + K$ quædam Æquationis Radices debent esse imaginariæ; atque hæc Regula aliquando deteget Radices imaginarias, quæ per NEWTONI Re-

Regulam non apparent. Huc usque nulla Regula præter hasce duas publicata fuerat. Sed Regulæ, quæ ex Theorematibus Propositionum XI. & XII. deducuntur utrique præcedenti sunt præferendæ; quia quæ Radices imaginariæ possunt cognosci Propositionibus VII. & IX, hæ semper patebunt per Propositiones XI & XII, & sæpe per has Propositiones deteguntur Radices impossibiles, quæ non apparent, si Æquationes per Propositiones VII. & IX. tantum examinentur. Utilitas, quam habent Regulæ ex Prop. XI. deductæ, præ illis, quæ ex præcedentibus deducuntur, plane patebit, si consideretur, quod per Prop. XI. habemus Valores Quantitatum a', b', c', d', e' separatim, cum per Propositiones præcedentes habeamus tantum valores quarundam summarum earundem Quantitatum eodem signo unitarum. Jam facile patet, quod si hæ Quantitates separatim sumtæ inveniantur positivæ, aggregatum quodcunque quarumvis illarum quantitatum debet etiam esse positivum; sed illud aggregatum potest esse positivum, licet quædam ex hisce Quantitatibus, a', b', c', d', e' sint negativæ: Unde sequitur si Radices Æquationis afficiantur omnes eodem signo, nullaque appareat per Prop. XI. Radix impossibilis, nullam quoque apparere per Propositiones præcedentes; quasdam vero Radices imaginarias per XI. detegi posse ubi nullæ per propositiones quæ hanc præcedunt apparent. Si quædam Æquationis Radices sint positivæ, & quædam negativæ, (quod facile patebit considerando signa Terminorum) tunc in multis Casibus XII. Propositio utilior erit ad detegendas Radices imaginarias, quam quævis ex præcedentibus.

Regula, quæ sequitur ex primo Theoremate Prop. XII. locum habet, sive Radices Æquationis diversis afficiantur signis, sive eodem. Multiplicetur Numerus, qui exprimit, quot Termini in Æquatione datum Terminum, ut $E x^{n-r}$, præcedunt, per Numerum Terminorum qui sequuntur in eadem Æquatione, dicaturque Productum illud m; sintque $+D$, $-C$, $+B$, $-A$, $+1$ Coefficientes Terminorum, qui præcedunt ipsum $E x^{n-r}$, sintque $+F$, $-G$, $+H$, $-I$, $+K$, Coefficientes Terminorum sequentium; si $\frac{1}{2} m E^2$ non sit majus quam $\overline{m+1} \times DF - \overline{m+4} \times CG + \overline{m+9} \times BH - \overline{m+16} \times AI + \overline{m+25} \times K$, Æquatio habebit aliquas Radices imaginarias; Coefficientes $m+1$, $m+4$, $m+9$, &c. oriuntur

ad-

addendo ipsi m Quadrata numerorum 1, 2, 3, 4, &c., qui denotant distantias Coefficientium, a Coefficiente E. Secundum Theorema Prop. XII. ostendit, quod si $\frac{1}{2} m' E^2$ non sit majus quam $m' DF - \overline{m'-12} \times CG + \overline{m'-72} \times BH - \overline{m'-240} \times AI + \overline{m'-600} \times K$ Æquatio habebit aliquas Radices imaginarias. Exempli Gratia

Si quatuor Radices Æquationis Quadrato-quadraticæ, ut $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ sint Quantitates Reales, deduci potest ex quavis Propositionum V, VII, IX, & XI, quod $\frac{3}{8} A^2$ debet esse majus quam B, & $\frac{3}{8} C^2$ majus quam BD. Prop. VII ulterius ostendit, quod $\frac{4}{9} B^2$ debet esse majus quam $AC - D$; nona demonstrat, quod $\frac{3}{4} B^2$ debet excedere AC; sed Regula nostra, deducta ex Prop. XI. ostendit quod $2B^2$ debet excedere $5AC - 8D$, cum excessus sit $\frac{1}{2} a'$, & Regula deducta ex secundo Theoremate Prop. XII. ostendit, quod B^2 debet semper esse majus quam $2AC + 4D$, cum excessus sit $\frac{1}{4} a''$. Patet ex plurimis præcedentibus Propositionibus, quod si Radices Æquationis habeant omnes idem signum AC debet esse majus quam 16 D: sint dicti excessus $5B^2 - 12AC + 12D = p$, $4B^2 - 9AC = q$, $AC - 16D = s$. patet, quod a' $(= 4B^2 - 10AC + 16D) = q - s = \frac{2}{5} \times \overline{2p - s}$, & quod $a'' = q + s = \frac{2}{5} \cdot 2p + 4s$. Ponamus nunc,

1. Quod s est positivum, & patebit, quod si sit vel p, vel q negativum a' debet etiam esse negativum; per consequens ubi VII. vel IX. Propositio ostendit Radices aliquas esse imaginarias, Prop. XI. easdem quoque detegit; sed quia a' $(= q - s = \frac{2}{5} \times 2p - s)$ potest inveniri negativum, ubi tamen p & q est utrumque positivum, sequitur, quod Regulâ, ex Prop. XI. deductâ, possumus in data Æquatione detegere Radices imaginarias, quæ per Propositiones præcedentes non apparent; sic si per NEWTONI Regulam, vel per Prop. VII. examinemus hanc Æquationem, $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 7x + 1 = 0$, nulla apparebit radix imaginaria; sed cum $2B^2 - 5AC + 8D$ $(= \frac{1}{2} a') = 200 - 210 + 8 = -2$ sit in hac Æquatione negativum, patet duas hic dari Radices imaginarias. Ponamus

2. Quod s sit negativum, & quod pateat ex signis Æquationis aliquas Radices esse positivas, aliquas negativas; in hoc casu, ut sciamus

mus an Æquatio habeat Radices imaginarias, utilissima est Regula quam deduximus ex 2 Theor. Prop. XII; scilicet, quod, si B^2 non sit majus quam $2AC+4D$, quædam Æquationis Radices debent esse imaginariæ; cum enim excessus ipsius B^2 supra $2AC+4D$ sit $= \frac{3}{4}a'' = \frac{1}{4}\times\overline{q+s} = \frac{1}{12}\times\overline{2p+4s}$, atque s sit negativum, manifestum est, quod si q vel p sit negativum $\frac{3}{4}a''$ debet esse negativum; potest etiam $\frac{3}{4}a''$ esse negativum, licet utrumque p & q sit positivum: Hæc itaque Regula semper deteget, quasdam dari Radices imaginarias, si quædam detegantur per Prop. VII. vel IX.; & sæpe ubi per hasce Propos. nullæ tales deteguntur Radices, quædam tamen deteguntur per dictam Regulam. Exem. gr. Si examinetur hæc Æquatio $x^4+5x^3+6x^2-x-12=0$ nullæ detegentur Radices imaginariæ per Prop. VII. vel IX, & licet $AC-16D$ $(=s)$ sit negativum, non tamen inde sequitur dari in Æquatione Radices impossibiles, quia patet ex signis Terminorum Radices hujus Æquationis diversis affici signis; sed quia $B^2-2AC+4D$ $(=36+10-48=-2)$ est negativum, patet per nostram Regulam hanc Æquationem habere aliquas Radices imaginarias.

Possem ostendere præterea, quomodo ope Regularum ex Propositionibus XI. & XII. deductarum detegi possit, num Æquatio habeat plus quam duas radices impossibiles, & in genere, quomodo hisce Regulis determinetur numerus Radicum inpossibilium; sed ut hoc stricte demonstretur, longa nimis explicatione, & quibusdam Lemmatibus indigerem: hoc tantum observandum, quod hæ propositiones XI. & XII. utilissimæ inveniuntur inter omnes, quas in hunc usum explicavi; Ex. gr. si Æquatio hæc $x^4-4ax^3+6a^2x^2-4ab^2x+b^4=0$

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$$

examinetur per Regulam NEWTONI, invenietur habere quatuor Radices impossibiles, si a sit majus quam b; licet enim Quadratum secundi Termini ductum in fractionem $\frac{3}{8}$ sit æquale Producto ex primo & tertio Termino, in hoc casu tamen signum — ponendum est sub secundum Terminum. Idem dicendum de quarti Termini Quadrato.

Regula deducta ex Prop. VII. ostendit quatuor dari Radices imagi-

ginarias, si a sit majus quam b, vel si b^2 sit majus quam $15a^2$. Sed Regula deducta ex Prop. XI. ostendit quatuor Radices esse semper imaginarias ubi a est majus quam b, vel b^2 majus quam $9a^2$; unde patet Regulæ hujus excellentia præ duabus hisce aliis. Tam multa dixi de Æquationibus Quadrato-quadraticis, ut observationes, quæ in Æquationes plurium Dimensionum fieri possunt, iis relinquere cogar, qui hoc sibi pensum inponere volent.

Dum præcedentes Propositiones investigarem, supputationes tam intricatas mihi fuit incundum, ut sæpe conatus fuerim faciliorem detegere Methodum hanc tractandi Materiam. Hæc, quæ sequitur multum mihi profuit, nec tibi forte injucunda videbitur; per hanc *maxima* quædam investigo facillima via, quæ vulgari Methodo non ita commode possent demonstrari.

Lemma V. Data linea AB in duas partes ad libitum secta ut in P, dico Rectangulum ex Partibus AP & PB fore maximum, si hæ partes sint æquales. Patet ex Elementis *Euclidis*.

A ——— P ——— B

Lemma VI. Si linea AB dividatur in Partes quotcunque AC, CD, DE, EB, Productum ex omnibus hisce partibus erit *maximum*, ubi hæ Partes sunt æquales inter se.

Sit enim punctum D ubi placeat, manifestum est, quod si DB secetur in duas Partes æquales in E, Productum AC × CD × DE × EB majus erit, quam AC × CD × De × eB, quia per Lemma præcedens DE × EB majus est quam De × eB; eandem ob rationem AD & CE debent æqualiter secari in C & D, per consequens necesse est ut omnes Partes AC, CD, DE, EB sint omnes æquales, ut productum ex iis omnibus sit *maximum*.

A ——— C ——— D ——— E e B

Lemma VII. Summa productorum, quæ fieri possunt ex binis Partibus ipsius AB est *maxima*, ubi hæ Partes sunt æquales. Summa horum Productorum est AC × CB, + CD × DB + DE × EB: Jam ut DE × EB sit *maximum* DB debet æqualiter secari in E per Lem. V. eandem ob causam AD & CE debent æqualiter secari in

C & D, ideſt omnes Partes AC, CD, DE, EB debent eſſe æquales, ut ſumma omnium horum Productorum ſit *maxima*.

Lemma VIII. Summa Productorum ex ternis Partibus lineæ AB eſt *maxima*, ubi omnes partes ſunt æquales; hæc ſumma eſt $AC \times CD \times DE + EB \times \overline{AC \times CD + AC \times DE + CD \times DE}$; ſit punctum E datum, manifeſtum eſt, quod AE debet æqualiter ſecari in C & D ut $AC \times CD \times DE$ ſit *maximum* per Lem. VI. & ut $AC \times CD + AC \times DE + CD \times DE$ ſit *maximum* per Lem. VII. Unde ſequitur, quod omnes hæ Partes AC, CD, DE, EB debent eſſe æquales, ut ſumma Productorum ex ternis illis ſit maxima.

Lemma IX. Manifeſtum eſt hanc ratiocinandi Methodum eſſe generalem, &, quod ſi ſumma quarumvis Quantitatum ſit data, ſumma omnium Productorum, quæ fieri poſſunt multiplicando datum illarum numerum inter ſe, debet eſſe *maxima*, ubi hæ Quantitates ſunt æquales; ſed ſumma Quadratorum, Cuborum, vel in genere, ſingularum harum Quantitatum ad quamvis potentiam elevatarum, eſt *minima* ubi hæ Quantitates ſunt æquales.

THEOREMA.

Ponamus $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + \&c. = 0$ *eſſe Æquationem cujus omnes Radices non ſunt æquales, exprimat* r *Dimenſionem alicujus Coefficientis, ut ipſius* D, *ſitque* $l = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$ *&c. tot ſumendo factores, quot dantur unitates in* r. *erit ſemper* $\frac{l}{n^r} \times A^r$ *majus quam* D, *ſi Radices Æquationis ſint Quantitates Reales, eodem ſigno affectæ.*

Hoc poteſt demonſtrari per Prop. præcedentes; ſed ut demonſtremus per poſtrema Lemmata, ſumamus Æquationem, cujus omnes Radices ſint æquales, illarumque Radicum ſumma = A ſummæ Radicum Æquationis propoſitæ, Æquatio aſſumta erit $\overline{x - \frac{1}{n}A}^n = 0$, vel $x^n - Ax^{n-1} + n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{A^2}{n^2} x^{n-2} - n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{A^3}{n^3} x^{n-3}$ &c. $= 0$;

&

& si r exprimat dimensionem Coefficientes alicujus Termini hujus Æquationis (idest numerum Terminorum, qui illum Coefficientem præcedunt) manifestum est quod ipse Terminus erit $l \times \frac{A^r}{n^r} \times x^{n-r}$; sed per suppositionem $D x^{n-r}$ est Terminus correspondens in Æquatione Proposita, & D debet esse summa omnium Productorum, quæ fieri possunt multiplicando tot Radices Æquationis inter si, quot dantur unitates in r. & $\frac{lA^r}{n^r}$ debet esse summa similium Productorum, ex Radicibus Æquationis assumtæ, quæ ultima summa maxima est, per Lem: præcedens, quia Æquationis assumtæ radices sunt omnes æquales, earumque summa æqualis summæ Radicum Æquationis propositæ, & summa ejusmodi Productorum est maxima, ubi quantitates sunt æquales inter se.

Sequendo eandem Methodum potest demonstrari, quod $\overline{\frac{2B\times}{n\times n-1}}\Big|^{\frac{r}{2}} \times l$ semper majus esse debet quam Coefficiens termini x^{n-r} in Æquatione, cujus Radices sunt Quantitates reales, eodem signo affectæ, dummodo r sit numerus major quam 2. Eodem modo $\overline{\frac{2\times 3C}{n\times \overline{n-1}\times n-2}}\Big|^{\frac{r}{3}} \times l$ debet esse majus dicto Coefficente, si r sit Numerus major quam 3. Hæc Theoremata facile possunt continuari.

Tertia Methodus, de qua initio hujus epistolæ mentionem feci, deducitur ex consideratione Limitum Radicum Æquationis, & licet, quod ad hos Limites adtinet, jam ab aliis auctoribus fuerit explicatum, quia tamen illud diversa via demonstro, atque huic materiæ applico, breviter hujus Methodi dabo rationem.

Lem. X. Si transformetur Æquatio Quadrato-quadratica $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$, in aliam quæ habeat omnes suas Radices respective minores valoribus ipsius x, datâ Quantitate e, ponendo $y = x - e$, vel $y + e = x$, Æquatio Transformata, inverso Terminorum ordine, hanc induet formam.

$$\begin{array}{llllll} e^4 & +\ 4\,e^3y & +\ 6\,e^2y^2 & +\ 4\,ey^3 & +\ y^4 = 0. \\ -\ A\,e^3 & -\ 3\,A\,e^2y & -\ 3\,A\,e\,y^2 & -\ A\,y^3 & \\ +\ B\,e^2 & +\ 2\,B\,e\,y & +\ B\,y^2 & & \\ -\ C\,e & -\ C\,y & & & \\ +\ D & & & & \end{array}$$

Ubi manifestum est

1°. Quod primus Terminus $e^4 - A\,e^3 + B\,e^2 - C\,e + D$, est Quantitas, quæ oritur substituendo e pro x in Æquatione proposita, $x^4 - A\,x^3 + B\,x^2 - C\,x + D$.

2°. Quod Coefficiens secundi Termina $4\,e^3 - 3\,A\,e^2 + 2\,B\,e - C$ est Quantitas, quæ oritur multiplicando unamquamque partem primæ $e^4 - A\,e^3 + B\,e^2 - C\,e + D$ per indicem ipsius e in illa parte, & dividendo Productum per e.

3°. Coefficiens tertii Termini $6\,e^2 - 3\,A\,e + B$ oritur ex præcedente, $4\,e^3 - 3\,A\,e^2 + 2\,B\,e - C$ multiplicando unamquamque partem per indicem ipsius e, & dividendo productum per $2\,e$.

4. Coefficiens quarti Termini oritur eodem modo ex præcedente, ubi Productum dividendum est per $3\,e$. Et in genere Coefficiens cujusvis Termini deduci potest ex Coefficiente Termini præcedentis, multiplicando unamquamque partem per indicem ipsius e, & dividendo Productum per e, & per indicem ipsius y in Termino, qui quæritur.

Lemma XI. si quævis Æquatio transformetur eodem modo, ut $x^n - A\,x^{n-1} + B\,x^{n-2} - C\,x^{n-3} + \&c. = 0$, supponendo $y = x - e$, vel $x = e + y$, & per consequens $x^n = \overline{e+y}|^n$, $A\,x^{n-1} = A \times \overline{e+y}|^{n-1}$, $B\,x^{n-2} = B \times \overline{e+y}|^{n-2}$ &c. Æquatio transformata, inverso Terminorum ordine hanc induet formam.

$$\begin{array}{llll} e^n & +\ n \times e^{n-1}y & +\ n \times \frac{n-1}{2}\,e^{n-2}\,y^2 & \&c. \\ -\ A\,e^{n-1} & -\ \overline{n-1} \times A\,e^{n-2}y & -\ \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2}\,A\,e^{n-3}\,y^2 & \&c. \\ +\ B\,e^{n-2} & +\ \overline{n-2} \times B\,e^{n-3}y & +\ \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2}\,B\,e^{n-4}\,y^2 & \&c. \\ -\ C\,e^{n-3} & -\ \overline{n-3} \times C\,e^{n-4}\,y & -\ \overline{n-3} \times \frac{n-4}{2}\,C\,e^{n-5}\,y^2 & \&c. \\ \&c. & \&c. & \&c. & \end{array}$$

Ubi

Ubi patet

1°. Quod Primus Terminus $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3}$ &c. est Quantitas, quæ oritur substituendo e loco ipsius x in Æquatione $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3}$ &c.

2°. Quod Coefficiens secundi Termini $ne^{n-1} - \overline{n-1}\,Ae^{n-2} + \overline{n-2}\,Be^{n-3} - \overline{n-3}\,Ce^{n-4}$ &c. deducitur ex præcedente, multiplicando quasvis ejus partes per indicem ipsius e in illa parte, & dividendo productum per e,

3°. Quod Coefficiens tertii Termini deducitur ex Coefficiente secundi, multiplicando eodem modo quamvis ejus partem per indicem ipsius e in illa parte, & dividendo per $2e$. In genere, Coefficiens cujusvis Termini, ut y^r, deducitur ex Coefficiente Termini præcedentis, videlicet y^{r-1}, multiplicando quamvis partem hujus Coefficientis, per indicem ipsius e in illa parte, & dividendo productum per re, id est per e ductum in indicem ipsius y.

Lemma XII. Si substituantur per vices duæ quælibet Quantitates K & L loco ipsius x in Æquatione $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$, & Quantitates, quæ ex hisce substitutionibus oriuntur sint affectæ diversis signis, erunt K & L limites unius vel plurium Radicum realium Æquationis propositæ; idest una harum Quantitatum debet esse major altera minor, quam una aut plures Radices reales hujus Æquationis.

Si enim supponas a, b, c, d esse Radices hujus Æquationis, patet, ex Æquationum Genesi, quod $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = \overline{x-a} \times \overline{x-b} \times \overline{x-c} \times \overline{x-d}$; ideoque si substituatur K & L pro x, in $\overline{x-a} \times \overline{x-b} \times \overline{x-c} \times \overline{x-d}$, productum sit in uno casu positivum, & in altero negativum, sequitur quod unus ex dictis factoribus, si K pro x substituatur debet habere signum diversum ab eo, quod habet, si L pro x substituatur; ponamus illum factorem esse $x-b$, cum $K-b$, & $L-b$ sint Quantitates, quarum una est positiva, & altera negativa, sequitur quod b una e Radicibus Æquationis debet esse minor quam una, & major quam altera harum Quantitatum K & L. Idest K & L erunt limites hujus Radicis.

Dico porro, quod Radix cujus K & L ſint Limites debet eſſe Radix realis propoſitæ Æquationis. Producti enim ex factoribus, qui Radices impoſſibiles continent in Æquatione nunquam poteſt ſignum mutari, quævis Quantitas Realis ſubſtituatur pro x, quia numerus ejusmodi Radicum ſemper eſt par; & Productum e duabus talibus Radicibus, ut $\overline{x - m - \sqrt{-n^2}} \times \overline{x - m + \sqrt{-n^2}}$ eſt $\overline{x - m}^2 + n^2$, quod ſemper eſt poſitivum, Quæcunque Quantitas pro x ſubſtituatur, dum n^2 manet poſitivum, id eſt, dum hæ duæ Radices manent impoſſibiles.

Lemma XIII. Si ſubſtituantur K & L per vices pro x in Æquatione $x^n - A x^{n-1} + B x^{n-2}$ &c, & quantitates, quæ inde oriuntur, diverſis afficiantur ſignis, erunt K & L limites unius vel plurium Radicum Æquationis propoſitæ: hoc Lemma eodem modo ac præcedens poteſt demonſtrari.

Theorema I. Si a, b, c, d ſint Radices Æquationis $x^4 - A x^3 + B x^2 - C x + D = o$, erunt hæ Limites Æquationis $4 x^3 - 3 A x^2 + 2 B x - C = o$.

Ponamus a eſſe minimam e Radicibus Æquationis Quadrato-quadraticæ $x^4 - A x^3 + B x^2 - C x + D = o$. b ſecundam, c tertiam, d quartam erunt valores ipſius y in Æquatione Lemmatis X $a - e$, $b - e$, $c - e$, $d - e$; deinde ſubſtituendo ſucceſſive a, b, c, d pro e in dicta Æquatione ipſius y, unus e valoribus hujus evaneſcet in una quaque ſubſtitutione; & primo Termino Æquationis ipſius y, videlicet $e^4 - A e^3 + B e^2 - C e + D$, evaneſcente, Æquatio reducetur ad Cubicam hûjus formæ, $4 e^3$

$$\begin{array}{llll} 4e^3 & + \; 6e^2 y & + \; 4ey^2 & + \; y^3 = o. \\ -3Ae^2 & - \; 3Ae\, y & - \; A y^2 & \\ +2Be & + \; B & & \\ -\; C & & & \end{array}$$

Per conſequens $4 e^3 - 3 A e^2 + 2 B e - C$ debet eſſe Productum ex reliquis tribus Radicibus ipſius y, mutato ſigno; id eſt hoc productum debet eſſe Æquale $- \overline{b - a} \times \overline{c - a} \times \overline{d - a}$, quando e ſupponitur Æquale a; debet eſſe $- \overline{a - b} \times \overline{c - b} \times \overline{d - b}$, quando $e = b$; debet eſſe $- \overline{a - c} \times \overline{b - c}$

$\times \overline{b-c} \times \overline{d-c}$ quando $e=c$; tandem debet esse $-\overline{a-d} \times \overline{b-d} \times \overline{c-d}$ quando $e=d$. Jam patet, quod hæc producta $\overline{b-a} \times \overline{c-a} \times \overline{d-a}$, $\overline{a-b} \times \overline{c-b} \times \overline{d-b}$, $\overline{a-c} \times \overline{b-c} \times \overline{d-c}$, $\overline{a-d} \times \overline{b-d} \times \overline{c-d}$, debent affici respective signis $+$, $-$, $+$, $-$; cum primum sit productum ex tribus Quantitatibus positivis; secundum, ex una negativa & duabus positivis; tertium ex duabus negativis & una positiva; quartum ex tribus negativis: ideo, cum substituendo a, b, c, d, per vices pro e in Quantitate $4e^3-3Ae^2+2Be-C$, hæc Quantitas alternatim fiat positiva & negativa, sequitur ex ultimo Lemmate, a, b, c, d esse Limites Æquationis $4e^3-3Ae^2+2Be-C=0$, vel $4x^3-3Ax^2+2Bx-C=0$.

COR. Sequitur ex hoc Theoremate, quod si a', b', c' sint Radices Æquationis $4e^3-3Ae^2+2Be-C=0$, debent eædem esse limites inter a, b, c, d Radices Æquationis Quadrato-quadraticæ $x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=0$; si enim a, b, c, d sint Limites Radicum a', b', c', debent reciprocè hæ esse Limites inter a, b, c, & d.

Theorema II. Multiplicentur Termini Æquationis cujusvis Quadrato-quadraticæ, ut $x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=0$, per Arithmeticam seriem Quantitatum $l+4m$, $l+3m$, $l+2m$, $l+m$, l, erunt Radices Æquationis propositæ limites Radicum Æquationis, quæ ex dicta multiplicatione oritur, idest hujus Æquationis

$$\begin{array}{l} lx^4 - lAx^3 + lBx^2 - lCx + lD=0. \\ +4mx^4 - 3mAx^3 + 2mBx^2 - mCx \end{array}$$

ponamus enim, quod substituendo a, b, c, d, Radices Æquationis datæ $x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=0$ successive pro x in $4x^3-3Ax^2+2Bx-C$, Quantitates quæ inde oriuntur sint $-R$, $+S$, $-T$, $+Z$; si eædem substituantur in Æquatione

$$\begin{array}{l} lx^4 - lAx^3 + lBx^2 - lCx + lD=0, \\ +4mx^4 - 3mAx^3 + 2mBx^2 - mCx \end{array}$$

cum evanescat, in quavis substitutione $lx^4-lAx^3+lBx^2-lCx+lD$ patet evidenter, quod reliquum evadet successive æquale $-mRx$, $+mSx$, $-mTx$, $+mZx$; ubi, cum signa harum Quantitatum sint alternatim Negativa & positiva, patet a, b, c, d esse limites ultimæ Æquationis, per Lem. XII.

COR.

COR. Hinc sequitur a, b, c, & d esse limites Æquationis Cubicæ $Ax^3 - 2Bx + 3Cx - 4D = 0$. & conversim Radices hujus Cubicæ esse limites Radicum Æquationis Quadrato-quadraticæ $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$; nam multiplicando hanc Quadrato-quadraticam Æquationem per Progressionem Arithmeticam, $0, -1, -2, -3, -4$, oritur hæc Cubica $Ax^3 - 2Bx^2 - 3Cx + 4D = 0$.

Theorema III. In genere, Radices Æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. \; 0$, sunt Limites Radicum Æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Ax^{n-2} + \overline{n-2} \times Bx^{n-3} \&c = 0$, vel cujusvis Æquationis, quæ deducitur ex prima, multiplicando ipsius Terminos per quamvis Arithmeticam Progressionem, ut $l + d$, $l + 2d$, $l + 3d$, &c; & conversim Radices hujus novæ Æquationis erunt Limites Radicum Æquationis Propositæ,

$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \&c. = 0$.

Hujus Theorematis demonstratio deducitur ex Lemmatibus XI. & XIII, eodem modo, quo præcedentia Theoremata deducta fuere ex Lemmatibus X, & XII. atque per hæc Theoremata facile pervenitur ad ea, quæ super hac materia tractantur ab Algebraicis scriptoribus.

Theorema IV. Æquatio $x_n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \& = 0$, tot habebit Radices imaginarias, quot dantur in Æquatione $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times A^{n-2} + \overline{n-2} \times Bx^{n-3} \&c. = 0$, vel in Æquatione $Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - \&c. = 0$.

Ponas aliquam Radicem Æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1}\, Ax^{n-2} + \overline{n-2}\, Bx^{n-3} \&c. = 0$, ut p, fieri imaginariam; duæ Radices Æquationis $x^n - Ax^{n-1}\, Bx^{n-2} \&c. = 0$, quæ hujus p sunt limites, non possunt ambæ esse Quantitates reales; patet enim ex demonstratione Theorematis 1, si hæ Radices sint Quantitates reales, & substituantur pro x in $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Ax^{n-2} + \overline{n-2} \times Bx^{n-3} \&c$, Quantitates, quæ inde orientur contrariis debere affici signis, & per consequens Radix p, cujus illæ sunt Limites debet esse Radix realis, contra suppositionem; idem locum habet, si agatur de Æquatione $Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - \&c. = 0$, eandem ob Rationem.

COR. 1. Æquatio Quadrato-quadratica, $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$

$+D=0$ duas habebit Radices imaginarias, si duæ dentur tales in Æquatione $4x^3-3Ax^2+2Bx-C=0$; vel in Æquatione $Ax^3-2Bx^2+3Cx-4D=0$. Sed duæ Radices Æquationis $4x^3-3Ax^2+2Bx-C=0$, sunt imaginariæ, si sint imaginariæ ambæ Radices Æquationis Quadraticæ $6x^2-3Ax+B=0$, vel Æquationis $3Ax^2-4Bx+3C=0$, quia Radices harum Æquationum Quadraticarum sunt limites illius Cubicæ Æquationis, per Theor. 111; Eandem ob causam duæ Radices Æquationis $Ax^3-2Bx^2+3Cx-4D=0$ erunt imaginariæ si sint impossibiles Radices Quadraticæ $3Ax^2-4Bx+3C=0$, vel hujus $Bx^2-3Cx+6D=0$. Ideo duæ ex Radicibus Æquationis $x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=0$ erunt imaginariæ, quando Radices harum Quadraticarum $6x^2-3Ax+B=0$, $3Ax^2-4Bx+3C=0$, $Bx^2-3Cx+6D=0$ evadunt impossibiles, id est, per Prop. I. quando $\frac{3}{8}A^2$ minus est quam B, vel $\frac{4}{9}B^2$, minus quam AC, vel $\frac{3}{8}C^2$ minus quam BD.

COR. II. Procedendo eodem modo ex quavis Æquatione, ut $x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}$ &c. $=0$, tot possunt deduci Æquationes Quadraticæ, quot dantur Termini in Æquatione proposita, primo & ultimo exceptis: & omnium harum Æquationum Quadraticarum Radices debent esse reales, si proposita nullas habeat imaginarias: Quadratica deducta ex tribus primis Terminis, $x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}$, habebit hanc formam, $n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}$ &c. $\times x^2-\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}$ &c. $\times Ax+\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}\times\overline{n-5}$ &c. $\times B$, continuando seriem factorum donec tot dantur, quot dantur unitates in $n-2$: deinde dividendo Æquationem per factores $n-2$, $n-3$, &c. qui in quovis Coefficiente apparent, Æquatio evadet ejusmodi, $n\times\overline{n-1}\times x^2-\overline{n-1}\times 2Ax+2\times 1\times B=0$; Cujus Radices erunt imaginariæ, per Prop. I, quando $n\times\overline{n-1}\times 2\times 4B$ majus est quam $\overline{n-1}^2\times 4A^2$, vel quando B majus est quam $\frac{n-1}{2n}A^2$; ita ut proposita Æquatio debeat habere aliquas Radices imaginarias, si sit B majus quam $\frac{n-1}{2n}A^2$, ut demonstratum fuit alio modo in Prop. V^ta^.

Quadratica Æquatio eodem modo deducta ex tribus primis Terminis Æquationis $Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3}$ & $= 0$; hanc induet formam $\overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3}$ &c. $\times Ax^2 - \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times \overline{n-4}$ &c. $\times 2Bx + \overline{n-3} \times \overline{n-4} \times \overline{n-5}$ &c. $\times 3C = 0$; Quæ, dividendo per factores communes cuivis Termino, reducitur ad hanc $\overline{n-1} \times \overline{n-2} \times Ax^2 - \overline{n-2} \times 4Bx + 6C = 0$; cujus Radices erunt imaginariæ, quando $\frac{2}{3} \times \frac{n-2}{n-1} \times B^2$ minus est quam AC; ideoque in hoc casu, quædam e Radicibus Æquationis Propositæ erunt etiam imaginariæ.

COR. III. In Genere sint $Dx^{n-r+1} - Ex^{n-r} + Fx^{n-r-1}$ utcunque tres Termini Æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ &c $= 0$, se mutuo sequentes; multiplicentur hujus Æquationis Termini primo per Progressionem n, $n-1$, $n-2$ &c. Deinde per $n-1$, $n-2$, $n-3$ &c, tum per $n-2$, $n-3$, $n-4$ &c, donec multiplicaveris per tot Progressiones, quot dantur unitates in $n-r-1$; Porro Termini, qui ex primis multiplicationibus oriuntur, multiplicentur toties per Progressionem 0, 1, 2, 3 &c, quoties unitas datur in $r-1$ & pervenietur tandem ad Quadraticam Æquationem hujus formæ $\overline{n-r+1} \times \overline{n-r} \times \overline{n-r-1} \times \overline{n-r-2}$ &c. $\times \overline{r-1} \times \overline{r-2} \times \overline{r-3} \times \overline{r-4} \times$ &c. $\times Dx^2$ $- \overline{n-r} \times \overline{n-r-1} \times \overline{n-r-2} \times \overline{n-r-3}$ &c. $\times r \times \overline{r-1} \times \overline{r-2} \times \overline{r-3}$ &c. $\times Ex +$ $\overline{n-r-1} \times \overline{n-r-2} \times \overline{n-r-3} \times \overline{n-r-4}$ &c. $\times \overline{r+1} \times r \times \overline{r-1} \times \overline{r-2}$ &c. $\times F = 0$. & dividendo per factores $n-r-1$, $n-r-2$ &c. & $r-1$, $r-2$ &c. qui in quovis Coefficiente dantur, Æquatio ad hanc formam reducetur, $\overline{n-r+1} \times \overline{n-r} \times 2 \times 1 \times Dx^2 - \overline{n-r} \times 2 \times r \times 2Ex + 2 \times 1 \times \overline{r+1} \times rF = 0$, cujus Radices erunt imaginariæ (per Prop. I.) quando $\frac{n-r}{n-r+1} \times \frac{r}{r+1} \times E^2$ minus est quam DF.

Unde patet si quivis Terminus hujus seriei Fractionum $\frac{n}{1}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{3}$, $\frac{n-3}{4}$ &c. $\frac{n-r+1}{r}$ $\frac{n-r}{r+1}$, $\frac{n-r-1}{r+2}$, &c. dividatur per Terminum proxime antecedentem, & quotientes ponantur super Terminos Æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ Cx^{n-3} &c. $= 0$, incipiendo a secundo Termino, si hoc peracto,

cto, Quadratum cujusvis Termini ductum in Fractionem supereminentem inveniatur minus quam Productum ex Terminis adjacentibus, quasdam hujus Æquationis Radices esse imaginarias.

Plura possent addi super hanc Materiam, sed vereor ne putes me jam ea dixisse, quæ sufficiunt, ideo addam tantum demonstrationem quarundam Regularum Algebraicarum, & quorundam Theorematum quæ facillime ex Lemmate XI. deducuntur.

I. Regula, qua cognoscitur, num duæ vel plures Radices Æquationis sint æquales, immediate sequitur ex dicto Lemmate. Pone duas Radices Æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3}$ &c. $= o$, esse æquales, erunt etiam æquales duo Valores ipsius y, (quod semper est æquale $x - e$) ponamus e esse æquale uni ex duobus Valoribus æqualibus ipsius x, & evanescent duo Valores ipsius y; ideoque primus & secundus Terminus Æquationis ipsius y in Lem. XI. debent evanescere; quia y^2 debet dari in quovis Termino: erunt ergo $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3}$ &c. $= o$, & $ne^{n-1} - \overline{n-1} \times Ae^{n-2} + \overline{n-2} \times Be^{n-3}$ &c. $= o$; per consequens duæ hæ Æquationes habebunt unam Radicem communem, quæ debet esse una ex Radicibus ipsius x, quæ æquales supponebantur. est ergo manifestum, quod ubi duo Valores ipsius x sunt æquales in Æquatione $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ &c. $= o$, illorum unus debet esse Radix Æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Ax^{n-2} + \overline{n-2} \times Bx^{n-3}$ &c. $= o$.

Si tres Valores ipsius x supponantur Æquales, inter se & ipsi e, tres Valores ipsius y ($= x - e$) evanescent, & tres primi Termini Æquationis ipsius y in Lem. XI. evanescent; ideoque erit $n \times \overline{n-1} \times e^{n-2} - \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times Ae^{n-3} + \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times Be^{n-4}$ &c. $= o$; & unus ex æqualibus Valoribus ipsius x erit una ex Radicibus hujus ultimæ Æquationis; & duo horum Valorum æqualium erunt inter Radices Æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Ax^{n-2} + \overline{n-2} \times Bx^{n-3}$ &c. $= o$. In genere si Æquatio $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ &c. $= o$ tot habeat Radices æquales, quot dantur unitates in S, tot ex hisce Radicibus dabuntur in Æquatione $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Ax^{n-2} + \overline{n-2} \times Bx^{n-3}$ &c. $= o$, quot dantur

unitates in $S - 1$, eodem modo tot erunt ex Valoribus æqualibus in Æquatione $n \times \overline{n-1} \times x^{n-2} - \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times Ax^{n-3} + \overline{n-2} \times \overline{n-3}\ Bx^{n-4}$ &c $= o$, quot dantur unitates in $S - 2$, & sic deinceps.

II. Generalis Regula, quam dedit NEWTONUS in *Articulo de Limitibus Æquationum*, qua invenitur Limes major quovis ex Valoribus ipsius x, immediate deducitur ex Lem. XI. patet enim, quod si e talis sit quantitas, ut posita in omnibus Coefficientibus ipsius y, videlicet in $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2}$ &c. $ne^{n-1} - \overline{n-1} \times Ae^{n-2} + \overline{n-2} \times Be^{n-3}$ &c, $n \times \frac{n-1}{2} e^{n-2} - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} Ae^{n-3} + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} Be^{n-4}$ &c, det omnes quantitates, quæ inde oriuntur, positivas, in hoc casu, cum nulla sit mutatio signorum in Æquatione ipsius y, sequitur omnes ipsius y Valores esse negativos; & cum sit semper $y = x - e$, patet e esse quantitatem majorem quovis valore ipsius x, idest e debet esse majus quavis Radice Æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3}$ &c. $= o$.

III Ex eodem Lem. XI. Theoremata quædam utilissima circa Methodum Serierum & Fluxionum, & circa Resolutionem Æquationum facillime deducuntur. Patet enim, quod Coefficiens secundi Termini in Æquatione ipsius y in dicto Lemmate est fluxio primi Termini divisa per fluxionem ipsius e; Coefficiens tertii Termini est secunda fluxio primi divisa per $2\dot{e}^2$; ponendo e fluere uniformiter; Termini tertii Coefficiens est tertia fluxio primi divisa per $2 \times 3\dot{e}^3$, & sic deinceps: ideoque supponendo $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2}$ &c. $= c$, Æquatio qua y determinari debet, erit $c + \frac{\dot{c}}{\dot{e}} y + \frac{\ddot{c}}{1 \times 2\dot{e}^2} y^2 + \frac{\dddot{c}}{1 \times 2 \times \dot{e}^3} y^3$ &c. $= o$. atque inde, quando e est propemodum valor ipsius x, Theoremata deduci possunt, quibus approximare possumus ad y, ac proinde ad x, quod supponitur æquale $y + e$.

TAB. XIII. Fig. 5. IV. Sit AP $(= x)$ abscissa, PM $(= z)$ ordinata cujusvis Curvæ BLM;

BLM; & ponamus aliam quamcunque abſciſſam AK $= e$, & ordinatam KL $= c$, erit $z (= PM) = c + \frac{\dot c}{\dot e} y \mp \frac{\ddot c}{2\dot e^2} y^2 \mp \frac{\dddot c}{2 \times 3 \dot e^3} y^3 + \frac{\ddddot c}{2 \times 3 \times 3 \dot e^4} y^4$ &c.

Ponatur enim z æquale cuicunque ſeriei, quæ conſiſtat ex datis Quantitatibus, & potentiis ipſius x, ut $Ax^n + Bx^r + Cx^s$ &c. & ſubſtituendo $e \mp y$ loco ipſius x habebimus eodem modo ac in Lem. XI.

$$z = Ae^n \mp nAe^{n-1} y + n \times \frac{n-1}{2} \times Ae^{n-2} y^2 \text{ \&c.}$$

$$+ Be^r \mp rBe^{r-1} y + r \times \frac{r-1}{2} \times Be^{r-2} y^2 \text{ \&c}$$

$$+ Ce^s \mp sCe^{s-1} y + s \times \frac{s-1}{2} \times Ce^{s-2} y^2 \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Sed ubi $x = e$, tunc $z = c = Ae^n + Be^r + Ce^s$ &c. & $\dot c = nAe^{n-1}\dot e + rBe^{r-1}\dot e + sCe^{s-1}\dot e$ &c. $\ddot c = n \times \overline{n-1} \times Ae^{n-2}\dot e^2 + r \times \overline{r-1} \times Be^{r-2}\dot e^2 + s \times \overline{s-1}\, Ce^{s-2}\dot e^2$ &c. ideoque $z = c \mp \frac{\dot c}{\dot e} y + \frac{\ddot c}{2\dot e^2} y^2 \mp \frac{\dddot c}{2 \times 3 \dot e^3} y^3$, &c.

Eodem modo invenies $c = z \pm \frac{\dot z}{\dot x} y + \frac{\ddot z}{2\dot x^2} y^2 \pm \frac{\dddot z}{2 \times 3 \dot x^3} y^3 +$ &c. nam $c = Ae^n + Be^r + Ce^s = A \times \overline{x \pm y}|^n + B \times \overline{x \pm y}|^r + C \times \overline{x \pm y}|^s$ &c. $= z \pm \frac{\dot z}{\dot x} y + \frac{\ddot z}{2\dot x^2} y^2$ &c. Area KLMP æqualis eſt fluenti ipſius $z\dot y$ vel $c\dot y$, ſed

$$c\dot y = z\dot y \pm \frac{\dot z}{\dot x} y \dot y + \frac{\ddot z}{2\dot x^2} y^2 \dot y \pm \frac{\dddot z}{2 \times 3 \dot x^3} y^3 \dot y \text{ \&c.}$$

& $z\dot y = c\dot y \mp \frac{\dot c}{\dot e} y \dot y + \frac{\ddot c}{2\dot e^2} y^2 \dot y \mp \frac{\dddot c}{2 \times 3 \dot e^3} y^3 \dot y$ &c. per conſequens ſumendo fluentes

$$KLMP = cy \mp -\frac{\dot{c}}{2e}y^2 + \frac{\ddot{c}}{2 \times 3e^2}y^3 \mp \frac{\dddot{c}}{2 \times 3 \times 4e^3}y^4 \text{ \&c. vel}$$

$$KLMP = zy + \frac{\dot{z}}{2x}y^2 + \frac{\ddot{z}}{2 \times 3x^2}y^3 \pm \frac{\dddot{z}}{2 \times 3 \times 4x^3}y^4 \text{ \&c.}$$

Hoc ultimum Theorema illud eſt, quod Doctiſſimus Dominus *Bernoulli* in lucem dedit in Actis Lipſienſibus Anni MDCXCIV; ſed jam Tempus eſt longæ huic Epiſtolæ finem imponendi, &c.



METHO-

METHODUS DETERMINANDI

Numerum Radicum impossibilium in Æquationibus affectis.

Auctore GEORGIO CAMPBELL.

LEMMA I.

IN omni affecta Æquatione Quadratica, $ax^2 - Bx + A = 0$, cujus Radices sunt reales, quarta pars Quadrati Coefficientis secundi Termini major est Rectangulo ex Coefficiente primi Termini & numero absoluto. idest $\frac{1}{4}B^2$ majus est quam $a \times A$; & vice versa si sit $\frac{1}{4}B^2$ majus quam $a \times A$, Radices Æquationis erunt reales; sed si sit $\frac{1}{4}B^2$ minus quam $a \times A$, Radices erunt impossibiles; sunt enim Radices Æquationis $\frac{\frac{1}{2}B + \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - a \times A}}{a}$ & $\frac{\frac{1}{2}B - \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - a \times A}}{a}$.

LEMMA II.

Quicunque sit Numerus Radicum impossibilium in Æquatione $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + \&c. \pm dx^3 \mp cx^2 \pm bx \mp A = 0$, tot exacte erunt Radices impossibiles in Æquatione $Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - dx^{n-3} + \&c. \pm Dx^3 \mp Cx^2 \pm Bx \mp 1 = 0$. Radices enim posterioris Æquationis reciprocæ sunt Radicum prioris, ut patet ex vulgari Algebra. Sint Radices Æquationis Quadrato-quadraticæ $x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0$, a, b, c, d, e quibus sint c, & d impossibiles, Radices Æquationis $Ax^4 - Dx^3 + Cx^2 - Bx + 1 = 0$ erunt $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$; ideoque harum duæ $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, etiam impossibiles.

LEM-

LEMMA III.

In omni Æquatione ut $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4}$ &c. $\pm ex^4 \mp dx^3 \pm cx^2 \mp bx \pm A = 0$, cujus omnes Radices sunt reales, si unusquisque Terminus multiplicetur per indicem ipsius x, Productumque dividatur per x, Æquatio, quæ inde orietur, $nx^{n-1} - \overline{n-1}\, Bx^{n-2} + \overline{n-2} \times Cx^{n-3} - \overline{n-3} \times Dx^{n-4} + \overline{n-4} \times Ex^{n-5}$ — &c. $\pm 4ex^3 \mp 3dx^2 \pm 2cx \mp b = 0$, habebit etiam omnes Radices suas reales. Sic si omnes Radices Æquationis $x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0$ sint reales, erunt etiam reales Radices Æquationis $4x^3 - 3Bx^2 + 2Cx - D = 0$.

Lemma hoc Conversionem non patitur, innumeri enim dantur Casus ubi Radices Æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Bx^{n-2} + \overline{n-2} \times Cx^{n-3} - \overline{n-3} \cdot Dx^{n-4} +$ &c. $\pm 3dx^2 \mp 2cx \pm b = 0$ sunt reales, cum tamen Æquatio $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} +$ &c. $\pm dx^3 \mp cx^2 + bx \mp A = 0$ habeat vel aliquas, vel quandoque omnes Radices impossibiles. Sed quicunque sit Numerus Radicum impossibilium in Æquatione $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Bx^{n-2} + \overline{n-2} \times Cx^{n-1}$ — &c. $\pm 2cx \mp b = 0$, tot ad minimum erunt Radices impossibiles in Æquatione $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2}$ — &c. $\pm cx^3 \mp A = 0$. Sic omnes Radices Æquationis $4x^3 - {}^3Bx^2 + {}^2Cx - D = 0$ possunt esse reales, & tamen duæ vel forte omnes Radices Æquationis $x^4 - Bx^3 + Cx^2$ $A = 0$ erunt impossibiles; sed si duæ Radices Æquationis $4x^3 - 3Bx^2 + 2Cx - D = 0$ sint impossibiles, duæ etiam ad minimum erunt impossibiles in Æquatione $x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0$. Hæc omnia fuere demonstrata ab Algebraicis scriptoribus speciatim a Domino *Reyneau* in suo Gallico Tractatu cui Titulus est *L'Analyse Demontrée*, & facile apparent per Methodum *de Maximis & Minimis*.

COROL. Sint omnes Radices Æquationis $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - F - x^{n-5} +$ &c. $\pm fx^5 \mp ex^4 \pm dx^3 \mp cx^2 \pm bx \mp A = 0$ reales, erunt etiam per hoc Lemma Reales omnes Radices Æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1}\, Bx^{n-2} + \overline{n-2}\, Cx^{n-3} - \overline{n-3}$

D

$D x^{n-4} + \overline{n-4}\, E x^{n-5} - \overline{n-5}\, F x^{n-6} +$ &c. $\pm 5 f x^4 \mp 4 e x^3 \pm 3 d x^2 \mp 2 c x \pm b = 0.$ idcirco per idem Lemma reales erunt omnes Radices Æquationis $n \times \overline{n-1}\, x^{n-2} - \overline{n-1} \times \overline{n-2}\, B x^{n-3} + \overline{n-2} \times \overline{n-3}\, C x^{n-4} - \overline{n-3} \times \overline{n-4}\, D x^{n-5} + \overline{n-4} \times \overline{n-5}\, E x^{n-6} - \overline{n-5} \times \overline{n-6}\, F x^{n-7} +$ &c. $\pm 20 f x^3 \mp 12 e x^2 \pm 6 d x \mp 2 c = 0$, vel (dividendo per 2) $n \times \frac{n-1}{2} x^{n-2} - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} B x^{n-3} + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} C x^{n-4} - \overline{n-3} \times \frac{n-4}{2} D x^{n-5} + \overline{n-4} \times \frac{n-5}{2} E x^{n-6} - \overline{n-5} \times \frac{n-6}{2} F x^{n-7} +$ &c. $\pm 10 f x^3 \mp 6 e x^2 \pm 3 d x \mp c = 0.$ Eodem modo reales erunt omnes Radices Æquationis $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} x^{n-3} - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} B x^{n-4} + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-4}{3} C x^{n-5} -$ &c. $\pm 10 f x^2 \mp 4 e x \pm d = 0.$ & sic possumus descendere donec perveniamus ad Æquationem Quadraticam $n \times \frac{n-1}{2} x^2 - \overline{n-1} \times B x + C = 0.$ Eædem Æquationes sic ascendunt

$$n \times \frac{n-1}{2} x^2 - \overline{n-1}\, B x + C = 0$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} x^3 - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} B x^2 + \overline{n-2}\, C x - D = 0.$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \frac{n-3}{+} x^4 - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} B x^3 + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} \times C x^3 - \overline{n-3}\, D x + E = 0.$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} x^5 - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} \times \frac{n-4}{4} \times B x^4 + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-4}{3}\, C x^3 - \overline{n-3} \times \frac{n-4}{2} \times D x^2 + \overline{n-4}\, E x - F = 0.$$

& sic deinceps.

Sit M aliquis ex Coefficientibus Æquationis $x^n - B x^{n-1} + C x^{n-2} - D x^{n-3} + E x^{n-4} -$ &c. $\pm A = 0.$ sintque L & N Coef-

ficientes ipsi M adjacentes; sitque m Exponens Coefficientis M, (per Exponens Coefficientis intelligo numerum, qui denotat locum, quem Coefficiens aliquod occupat inter alia, sic si M representet Coefficiens E ideoque L = D, & N = F, erit $m = 4$.) facile patebit, quod inter praecedentes Æquationes ascendentes, illa cujus numerus absolutus est N hanc obtinebit formam $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \&c. \times \frac{n-m}{m+1}$ $x^{m+1} - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} \times \&c. \times \frac{n-m}{m} Bx^m + \overline{n-2} \times \frac{n-2}{3}$ $\times \&c. \times \frac{n-m}{m-1} Cx^{m-1} - \&c. \pm \overline{n-m+1} \times \frac{n-m}{2} Lx^2 \mp \overline{n-m}$ $\times Mx \pm N = 0$. Cujus omnes Radices erunt reales, si sint reales Radices Æquationis $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \&c. \pm A = 0$. Sit N = F, erit M = E, L = D, & $m = 4$. Et Æquatio, cujus numerus absolutus est F, erit $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} x^5$ $- \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} \times \frac{n-4}{4} Bx^4 + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-4}{3}$ $Cx^3 - \overline{n-3} \times \frac{n-4}{2} \times Dx^2 + \overline{n-4} Ex - F = 0$.

PROPOSITIO I.

Sit $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \pm ex^4 \mp dx^3 \pm cx^2 \mp bx \pm A = 0$ Æquatio cujuscunque Dimensionis, cujus omnes Radices sint reales; sit M aliquis Coefficiens hujus Æquationis, L & N Coefficientes adjacientes m Exponens ipsius M. Erit Quadratum Coefficientis M ductum in Fractionem $\frac{m \times \overline{n-m}}{\overline{m+1} \times \overline{n-m+1}}$ semper majus L × N, Rectangulo ex Coefficientibus adjacentibus; sic in Æquatione $x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + E = 0$, ubi $n = 4$, faciendo M=C, ideoque L=B, N=D, & $m = 2$, erit $\frac{2 \times \overline{4-2}}{\overline{2+1} \times \overline{4-2+1}} \times C^2$, vel $\frac{4}{9} C^2$ majus quam B × D, dummodo omnes Radices Æquationis sint reales.

Quia

Quia (per Lem. III.) Radices Æquationis Quadraticæ $n \times \frac{n-1}{2} x^2 - \overline{n-1} B x + C = 0$ ſunt reales, erit (per Lem. I.) $\frac{1}{4} \times \overline{n-1}|^2 \times B^2$ majus quam $n \times \frac{n-1}{2} \times C$, & dividendo utrumque per $\frac{n \times \overline{n-1}}{2}$, erit $\frac{n-1}{2n} \times B^2$ majus quam $1 \times C$; ideoque in Æquatione $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + \&c. \pm A = 0$, dimenſionum n, & cujus omnes Radices ſunt reales, Quadratum ipſius B Coefficientis ſecundi Termini, ductum in Fractionem $\frac{n-1}{2n}$ majus eſt quam $1 \times C$ Rectangulum ex Coefficientibus adjacentibus. Sed (per Lem. II.) omnes Radices Æquationis $Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - \&c. \pm Cx^2 \mp Bx \pm 1 = 0$, vel, dividendo per A, Radices Æquationis $x^n - \frac{b}{A} x^{n-1} + \frac{c}{A} x^{n-2} - \&c. \pm \frac{C}{A} x^2 \mp \frac{B}{A} x \pm \frac{1}{A} = 0$, ſunt reales, ideoque (ex iis quæ modo diximus) $\frac{n-1}{2n} \times \frac{b^2}{A^2}$ majus eſſe debet quam $1 \times \frac{c}{A}$, & per conſequens $\frac{n-1}{2} \times b^2$ majus eſt quam $c \times A$; idcirco in Æquatione $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \&c. \pm cx^2 - bx + A = 0$, Dimenſionum n, & cujus omnes Radices ſunt reales, Quadratum Coefficientis x ductum in Fractionem $\frac{n-1}{2}$, majus eſt Rectangulo ex Coefficiente Termini x^2, & Numero abſoluto; ſed, (per Cor. Lem. III.) omnes Radices Æquationis $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \&c. \times \frac{n-m}{m+1} x^{m+1} - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} \times \&c. \times \frac{n-m}{m} B x^m + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} \times \&c. \times \frac{n-m}{m-1} C x^{m-1}$ &c. $\pm \overline{n-m+1} \times \frac{n-m}{2} L x^2 \mp \overline{n-m} M x \pm N = 0$, ſunt reales; ideoque, cum hæc Æquatio ſit Dimenſionum $m+1$) Quadratum $\overline{n-m} \times M$ ductum

tale Quadratum ita multiplicatum, minus eſt ejusmodi Producto, id certum eſt indicium duas dari Radices impoſſibiles.

Ex dictis, immediate deducitur demonſtratio Regulæ, quam dedit illuſtriſſimus NEWTONUS, qua determinatur Numerus Radicum impoſſibilium, in quavis data Æquatione.

Scholium.

Æquationis $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5} +$ &c. $\pm$ A &c. $= 0$ Radices deſignentur Litteris $a, b, c, d, e, f, g,$ &c. erit (ut notum eſt) B ſumma omnium Radicum $= a + b + c + d + e + f + g$ &c. C ſumma Productorum ex binis Radicibus $= ab + ac + ad + ae + af + ag +$ &c. D ſumma Productorum ex ternis radicibus $= abc + abe + abf + abg +$ &c. $E = abcd + abcf + abcg +$ &c. $F = abcde + abcdf + abcdg + bcdef +$ &c, & ita deinceps. Repreſentet, ut in Propoſitione, M aliquod ex Coefficientibus, L & N Coefficientes adjacentes; ſit m Exponens ipſius M; ſit Z ſumma Quadratorum omnium Differentiarum, quæ dari poſſunt inter Terminos Coefficientis M: ſit α ſumma ex omnibus dictis Quadratis quorum termini differunt unâ litterâ, β ſumma illorum Quadratorum, quorum Termini duabus differunt litteris; γ ſumma illorum, quorum Termini tribus differunt litteris; δ ſumma, quorum Termini quatuor differunt litteris, & ſic de cæteris. Si M ſit æquale $F = abcde + abcdf + abcdg +$ &c erit $Z = \overline{abcde - abcdf}|^2 + \overline{abcde - abcdg}|^2 + \overline{abcde - abcfg}|^2 + \overline{bcdef - abfgh}|^2 +$ &c. $\alpha = \overline{abcde - abcdf}|^2 + \overline{abcde - abcdg}|^2 + \overline{abcde - abcdh}|^2 + \overline{bcdef - bcdeg}|^2 +$ &c. $\beta = \overline{abcde - abcfg}|^2 + \overline{abcde - abcfh}|^2 + \overline{bcdef - bcdgh}|^2 +$ &c. $\gamma = \overline{abcde - abfgh}|^2 + \overline{abcdf - abegh}|^2 +$ &c. $\delta = \overline{abcde - afghk}|^2 + \overline{acdfg - abehk}|^2 +$ &c. Hiſce poſitis, dico, quod Quadratum cujusvis Coefficientis, ut M, ductum in Fractionem $\frac{m \times \overline{n - m}}{\overline{m+1} \times \overline{n - m + 1}}$ excedit Rectangulum ex Coefficientibus adjacentibus $L \times N$, Quantitate $\frac{\overline{n+1} \times Z}{\overline{m+1} \times \overline{n - m + 1}}$

— $\frac{1}{2}$

$\overline{abc-ade}|^2 + \overline{abc-cde}|^2 + \overline{abc-bde}|^2 +$ &c. $\gamma = o$. Ideo $\frac{3 \times \overline{5-3}}{\overline{3+1} \times \overline{5-3+1}} \times D^2$, vel $\frac{1}{2} D^2$ excedet $C \times E$ Quantitate $\frac{\overline{5+1} \times Z}{\overline{3+1} \times \overline{5-3+1}} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\beta =$ (quia $Z = \alpha + \beta$) $\frac{1}{6}\beta = \frac{1}{6} \times \overline{abc-ade}|^2 + \frac{1}{6} \times \overline{abc-bde}|^2 +$ &c, qui semper est Numerus Positivus, ubi Radices sunt reales.

Sit $M = E = abcd + abce + abde + bcde +$ &c. erit $L = D$, $N = A$, $m = 4$, $Z = \overline{abcd-abce}|^2 + \overline{abcd-abde}|^2 + \overline{abcd-bcde}|^2 +$ &c. $= \alpha$; $\beta = o = \gamma = \delta$. Ideo $\frac{4 \times \overline{5-4}}{\overline{4+1} \times \overline{5-4+1}} \times E^2$, vel $\frac{2}{5} E^2$ excedet $D \times A$ Quantitate $\frac{\overline{5+1} \times Z}{\overline{4+1} \times \overline{5-4+1}} - \frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{5} Z - \frac{1}{2}\alpha, = \frac{1}{10} Z = \frac{1}{10} \times \overline{abcd-abce}|^2 + \frac{1}{10} \times \overline{abcd-bcde}|^2 +$ &c. Qui Numerus est semper Positivus, si Radices sint Numeri reales.

PROPOSITIO II.

Sit $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} -$ &c. $\pm = o$ Æquatio cujuscunque Dimensionis, cujus Radices cum ipsarum signis exprimantur litteris a, b, c, d, e, f, &c. Sit M Coefficiens quicunque hujus Æquationis, sint L & N Coefficientes adjacentes ipsi M; K, O Coefficientes adjacentes ipsis L & N; I, P adjacentes ipsis K, & O; H, Q, ipsis I & P, & sic deinceps sit m exponens Coefficientis M, & Z (ut in Scholio) = summæ omnium Quadratorum, quæ fieri possunt ex Differentiis Terminorum ipsius M. Quadratum cujuscunque Coefficientis, ut M, ductum in hanc Fractionem $\frac{1}{2} \times \overline{1 - \frac{1}{n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \text{ \&c.} \times \frac{n-m-1}{m}}}$ excedit $L \times N - K \times O + I \times P - H \times Q +$ &c. Quantitate $\frac{\frac{1}{2} Z}{n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \text{ \&c} \times \frac{n-m-1}{m}}$,

quæ

quæ Quantitas semper est Numerus positivus, cum Radices a, b, c, d, &c. sunt reales, sive positivæ, sive negativæ.

Sit Æquatio septem Dimensionum, ut $x^7 - Bx^6 + Cx^5 - Dx^4 + Ex^3 - Fx^2 + Gx - A = 0$. Cujus Radices sint a, b, c, d, e, f, g. in hoc casu $n = 7$, sit $M = E = abcd + abce + abcf + abcg + bcde +$ &c. erit $m = 4$, $L = -D$, $N = -F$, $K = C$, $O = G$, $I = -B$, $P = -A$; $Z = \overline{abcd - abce}|^2 + \overline{abcd - abcf}|^2 + \overline{abcd - abcg}|^2$ &c. + Idcirco $\frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{7 \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{4}} \times E^2$ vel $\frac{17}{35} E^2$ excedet $D \times F - C \times G + B \times A$ Quantitate $\frac{\frac{1}{2} Z}{7 \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{4}}$ vel $\frac{Z}{70} = \frac{1}{70} \times \overline{abcd - abce}|^2 + \frac{1}{70} \times \overline{abcd - abcf}|^2 +$ &c.

Ex hac Propositione deducitur sequens Regula determinandi Numerum Radicum impossibilium in data Æquatione.

E Binomio elevato ad Potentiam cujus index exprimit Dimensiones Æquationis Propositæ sumantur Unciæ Terminorum mediorum, unitate depressæ; quævis Uncia sic deminuta, dividatur per respondentem Unciam duplicatam, & Fractiones, quæ inde oriuntur ponantur supra medios Terminos Correspondentes in data Æquatione: & si Quadratum cujusvis Termini ductum in Fractionem supereminentem majus sit quam Rectangulum e Terminis immediate adjacentibus, minus Rectangulo ex proxime utrinque jacentibus, plus Rectangulo ex utrinque sequentibus, minus &c, tunc signum + ponatur sub ipsum Terminum, cujus Quadratum fuit multiplicatum per Fractionem supereminentem; sin minus, ponatur signum Negativum, atque sub Primum & Ultimum Terminum ponatur signum +. Tot ad minimum erunt Radices, impossibiles, quot dantur mutationes in serie signorum a signo + ad signum —, vel a —, ad +.

Ex. gr. Determinandæ sint Radices impossibiles in Æquatione hac, $x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = 0$. Unciæ Terminorum inter mediorum in septima Potentia cujusvis Binomii

nemii sunt 7, 21, 35, 35, 21, 7. ex quibus subtrahendò unitatem, & dividendo, reliquum per ipsam unciam duplicatam, Quotientes erunt $\frac{6}{14}$, $\frac{20}{42}$, $\frac{34}{70}$, $\frac{34}{70}$, $\frac{20}{42}$, $\frac{6}{14}$. vel $\frac{3}{7}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{17}{35}$, $\frac{17}{35}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{3}{7}$; Quæ fractiones ponendæ sunt supra medios Terminos datæ Æquationis hoc modo.

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{7} & \frac{10}{21} & \frac{17}{35} & \frac{17}{35} & \frac{10}{21} & \frac{3}{7} & \\ x^7 & -5x^6 & +15x^5 & -23x^4 & +18x^3 & +10x^2 & -28x & +24=0. \\ + & - & + & - & + & - & + & + \end{array}$$

Deinde quia Quadratum ipsius $5x^6$ ductum in fractionem supereminentem $\frac{3}{7}$, idest $\frac{75}{7}x^{12}$ minus est quam $x^7 \times 15x^5$, idest quam $15x^{12}$, pono signum — sub Terminum $5x^6$. Porro, quia Quadratum ipsius $15x^5$ ductum in Fractionem supereminentem $\frac{10}{21}$, id est $\frac{750}{7}x^{10}$ majus est quam $\overline{-5x^6}\times\overline{-23x^4}-\overline{x^7}\cdot\overline{18x^3}=97x^{10}$, pono signum + sub Terminum $15x^5$. Video etiam quod $\frac{8993}{35}x^8$ (Quadratum Termini $23x^4$ ductum in Fractionem $\frac{17}{35}$) minus est, quam $\overline{15x^5}\times\overline{18x^3}-\overline{5x^6}\times\overline{10x^2}+\overline{x^7}\times\overline{-28x}=292x^8$, pono signum — sub Terminum $23x^4$, deinde quia $\overline{18x^3}|^2\times\frac{17}{35}$, id est $\frac{5508}{35}x^6$, majus est quam $\overline{-23x^4}\times\overline{10x^2}-\overline{15x^5}\times\overline{-28x}-\overline{5x^6}\times\overline{24}=70x^6$, pono signum + sub Terminum $18x^3$. Porro, cum $\overline{10x^2}|^2\times\frac{10}{21}$, vel $\frac{1000}{21}x^4$ minus sit quam $\overline{18x^3}\times\overline{-28x}-\overline{23x^4}\times\overline{24}=48x^4$, pono signum — sub Terminum $10x^2$; Tandem quia $\overline{28x}|^2\times\frac{3}{7}$, vel $336x^2$ majus est quam $10x^2\times 24=240x^2$, pono sub $28x$ signum +; & ut dixi sub primum atque ultimum Terminum scribo +. Cum autem sint sex mutationes in signis video sex dari Radices impossibiles.

Si Radices impoſſibiles fuiſſent inveniendæ per Regulam NEWTONIANAM, ſic fuiſſet operandum.

$$\frac{3}{7} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{3}{7}$$

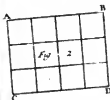
$$x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = 0.$$

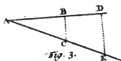
$$+ \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$$

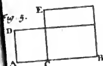
per quam Regulam duæ tantum Radices impoſſibiles inveniuntur, cum dentur ſex, ſcilicet $1 + \sqrt{-3}$, $1 - \sqrt{-3}$, $1 + \sqrt{-2}$, $1 - \sqrt{-2}$, $1 + \sqrt{-1}$, $1 - \sqrt{-1}$, ſeptima Radix eſt -1.

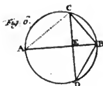
FINIS.

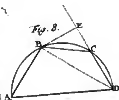


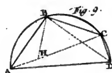

A
B
Fig 2
C
D

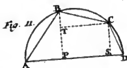

A
B
D
C
Fig. 3.
E

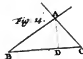

Fig. 5.
E
D
A
C
B

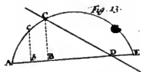

Fig. 6.
C
A
E
B
D

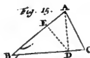

Fig. 8.
B
C
A
D


B
Fig. 9.
C
H
A
D

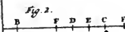

Fig. 11.
B
C
T
P
S
A
D

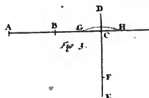

Fig. 14.
A
B
D
C

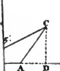

Fig. 13.
C
c
A
b
B
D
E

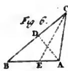

Fig. 15.
A
E
B
D
C

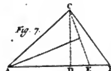



Fig. 2.
B
F
D
E
C
F

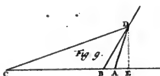

D
A
B
G
H
C
Fig. 3.
F
E

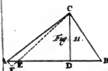

C
A
D

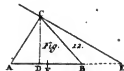

Fig. 6.
C
D
B
E
A


C
Fig. 7.
A
D
E
B


E
B
G


D
Fig. 9.
C
B
A
E


C
Fig. 11.
A
F
E
D
B


C
Fig. 12.
A
D
F
B
E


D
C
Fig. 14
B
E

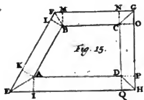

F
M
N
G
L
B
C
O
Fig. 15.
K
A
D
P
E
I
Q
H



Fig. 3.

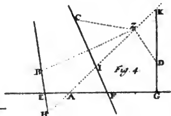


Fig. 6.

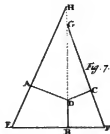
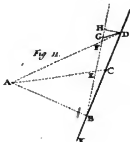


Fig. 8.



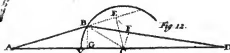
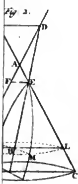
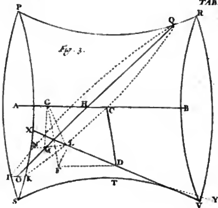
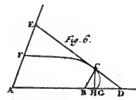


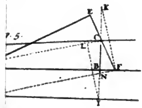
Fig. 12.

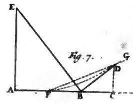

Fig. 2.
D
A
F
E
H
M
L
C


P
Q
R
Fig. 3.
A
G
H
C
B
X
N
G
L
D
F
I
O
K
T
S
V
Y


C
B
F


E
Fig. 6.
F
C
A
B
H
G
D


5.
E
K
L
C
B
N
F
I


E
Fig. 7.
G
D
A
F
B
C


D
H
C

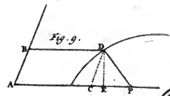

Fig. 9.
B
D
A
C
E
F



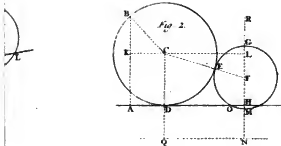
Fig 4.

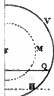
Fig 6.

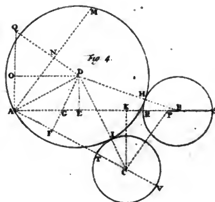
Fig 7.

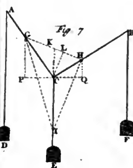
Fig 8.

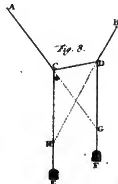



Fig. 2.
B
C
K
E
A
D
O
Q
R
G
L
F
H
M
N

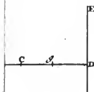

V
M
Q
H

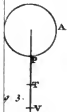

Fig. 4.
Q
M
N
D
O
A
G
E
K
H
B
S
F
I
C
V


Fig. 7
A
G
K
L
H
B
P
Q
D
E
F


A
B
Fig. 8.
C
D
G
H
E
F

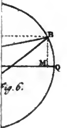
















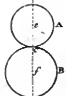




Fig. 5.

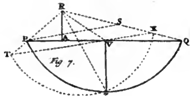


Fig 7.

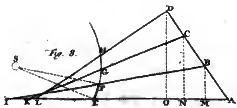
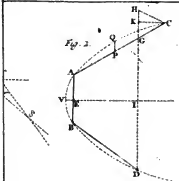
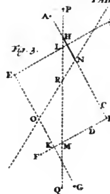
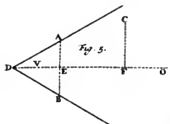


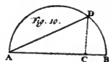
Fig. 8.

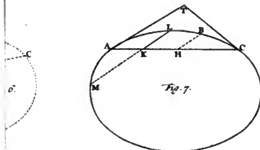


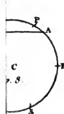

H
K
C
Q
G
P
A
V
E
I
B
D
Fig. 2.

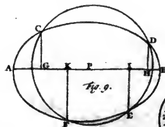

P
A
B
H
L
N
E
R
f
O
I
D
K
M
F
Q
G
Fig. 3.


C
A
D
V
E
F
O
B
Fig. 5.

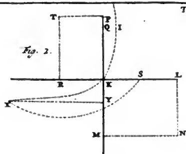

D
A
C
B
Fig. 10.

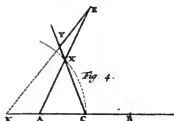

T
L
B
A
K
H
C
M
Fig. 7.

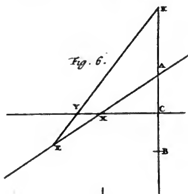

P
A
C
F
S

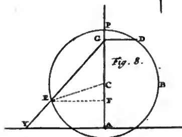

C
D
A
G
K
P
I
H
B
E
F
Fig. 9.




Fig. 2.
T
P
Q
I
R
K
S
L
Y
Y
M
N

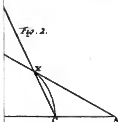

E
Y
X
Fig. 4.
K
A
C
B

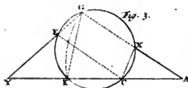

E
Fig. 6.
A
Y
C
X
E
B

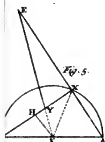

P
G
D
Fig. 8.
C
B
E
F
Y
A

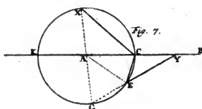


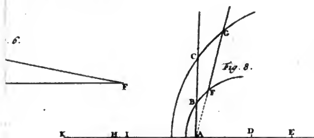
TAB. X.

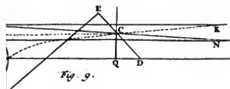

Fig. 2.
X
C
A


G
Fig. 3.
E
X
Y
K
C
A

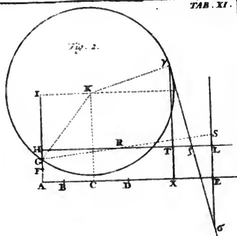

E
Fig. 5.
X
H
Y
K
A

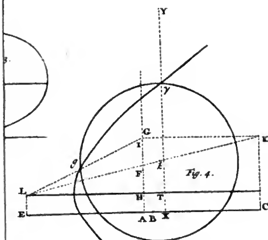

X
Fig. 7.
K
A
C
B
Y
E
G


. 6.
F
G
C
Fig. 8.
B
F
K
H
I
A
D
E


E
C
K
N
Q
D
Fig. 9.




Fig. 2.
γ
I
K
S
H
R
T
L
G
F
A
B
C
D
X
E
σ


Y
γ
G
K
I
g
l
F
Fig. 4.
L
H
T
E
A B
X
C



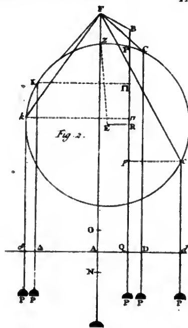

F
B
Z
P
C
L
Π
k
π
E
R
p
r
O
δ
Δ
A
Q
D
γ
N
P
P
P
P
P

Fig. 2.

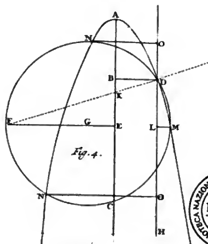

A
N
O
B
D
K
F
G
E
L
M
N
C
O
H

Fig. 4.


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

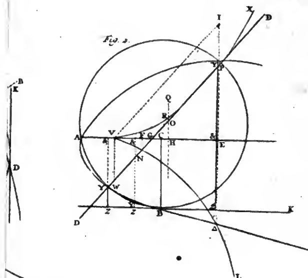
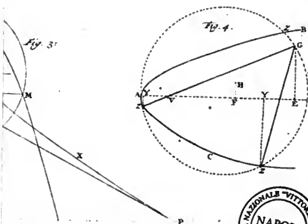

Fig. 2.


Fig. 5.


Fig. 3.
Fig. 4.



[illegible]